А. В. Погорелов

Лекции по основаниям геометрии

Издательство Харьковского университета

А. В. ПОГОРЕЛОВ

ЛЕКЦИИ ПО ОСНОВАНИЯМ ГЕОМЕТРИИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования УССР в качестве учебного пособия для студентов университетов УССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
Харьков 1964

П43
517.5

Книга содержит изложение курса «Основания геометрии» в объеме, предусмотренном программой Министерства высшего и среднего специального образования для университетов. Она отличается оригинальностью изложения многих разделов курса, в особенности раздела «Геометрия Лобачевского» и раздела «Проективная геометрия».

Книга рассчитана на студентов университетов и педагогических институтов.

Ответственный редактор — проф. *Я. П. Бланк*

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании книги глава III, содержащая исследование аксиом эвклидовой геометрии, дополнена § 6. В этом параграфе показывается, что принятую нами систему аксиом движения можно значительно сократить, оставив только аксиомы III_1, III_2, III_3 и III_7.

Автор

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Мне неоднократно приходилось читать университетский курс оснований геометрии. При этом возник ряд соображений относительно изложения отдельных разделов курса. Эти соображения были руководящими при написании настоящего пособия.

Традиционный курс оснований геометрии, не считая исторического обзора, которым обычно курс начинается, содержит четыре темы: аксиоматическое построение эвклидовой геометрии, анализ аксиом эвклидовой геометрии, геометрию Лобачевского, проективную и другие геометрии.

Излагая вопрос об аксиоматическом построении эвклидовой геометрии, ставят перед собой задачу, отправляясь от аксиом, развить систему вытекающих из нее следствий до такого объема, когда изложение в школьном курсе геометрии становится достаточно безупречным. Практически здесь приходится строго обосновать измерение отрезков и углов, доказать основные теоремы о конгруентности простейших фигур, вывести известные неравенства для сторон и углов треугольника, рассмотреть подобие треугольников и закончить теоремой Пифагора.

Несмотря на элементарность этой части курса, изложение ее в указанном объеме требует значительного времени. И фактически дело обстоит примерно так. Когда, наконец, устанавливается естественный порядок следования точек на прямой и для отрезков доказывается существование длины, аудитория становится настолько подозрительной, что начинает сомневаться вообще в возможности когда-нибудь дойти до теоремы Пифагора таким путем. Это сомнение дальнейшим изложением не только не рассеивается, а еще больше укрепляется тем, что из-за недостатка времени лектор обычно ограничивается очень немногими следствиями аксиом конгруентности и переходит к рассмотрению различных предложений, эквивалентных пятому постулату.

Мне представляется, что дело здесь можно в какой-то мере поправить следующим образом.

Во-первых, необходимо вместо аксиом порядка Гильберта вводить систему аксиом, основанную на отношении следования для пар точек. Такая система, как известно, эквивалентна системе аксиом Гильберта, но отличается от нее простотой, близостью к привычным представлениям о расположении точек на прямой и позволяет двумя-тремя простыми следствиями, из нее вытекающими, подготовить вопрос о введении меры для отрезков и углов.

Во-вторых, вместо аксиом конгруентности надо вводить аксиомы движения. Именно на аксиомах движения основано изложение в школьном курсе геометрии. Вводить аксиомы конгруентности, основанные на отношении для фигур, которое можно представить себе только с помощью движения для того, чтобы потом доказать существование этого самого движения, вряд ли целесообразно.

В-третьих, надо формулировать только аксиому непрерывности Дедекинда, не устанавливая ее эквивалентность аксиоме Кантора и аксиоме Архимеда. Этому вопросу слишком много уделяется времени в теории вещественных чисел, уже знакомой учащемуся.

Что же касается эквивалентов пятого постулата, то о них следует только упомянуть и то в соответствующем месте исторического обзора. Все эти утверждения эквивалентности становятся тривиальными после установления полноты системы аксиом Лобачевского.

Указанные соображения хотя и не новы, позволяют настолько облегчить начало изложения, непосредственно примыкающее к аксиомам, что представляется возможным действительно развить элементарную геометрию в указанном объеме без особого труда. А этого нельзя игнорировать, если принять во внимание будущую профессию основной массы слушателей — учителя средней школы.

Следующая тема курса — анализ аксиом элементарной геометрии — имеет своей задачей рассмотреть вопросы непротиворечивости, независимости и полноты системы аксиом элементарной геометрии.

Здесь прежде всего необходимо четко формулировать основные вопросы, возникающие при аксиоматическом построении любой теории и геометрии в частности, доказать непротиворечивость и полноту системы аксиом элементарной геометрии. Что же касается их независимости, то достаточно ограничиться доказательством независимости аксиомы непрерывности в форме Дедекинда и аксиомы параллельности. В последнем вопросе предпочтительно пользоваться интерпретацией Клейна. Дело в том, что в этой интерпретации проверка всех аксиом, кроме аксиом движения, действительно тривиальна, а проверка аксиом движения также может быть проведена достаточно просто путем приведения произвольной точки к центру некоторым стандартным образом, а затем использования эвклидовых вращений около центра абсолюта и зеркальных отражений в его диаметрах.

Существенно, нам кажется, надо изменить изложение темы — геометрия Лобачевского. Традиционное изложение ее начинается теорией параллельных по Лобачевскому. Задача, которую при этом ставят, заключается не в том, чтобы показать, какие парадоксальные свойства взаимного расположения прямых можно вывести из аксиомы параллельности Лобачевского, а в том, чтобы доказать полноту системы аксиом и вывести метрическую форму плоскости Лобачевского. Задача эта не легкая и ее решение в своей существенной части обычно переходит в так называемый необязательный раздел курса, который подается в описательном плане без доказательств.

Представляется более естественным и современным начать со второй части поставленной задачи — вывода линейного элемента плоскости в рамках абсолютной геометрии без использования каких-либо предположений о параллельных. Такой подход оказывается не только не безнадежным, но более простым и экономным. Строго установленная полнота системы аксиом геометрии Лобачевского и изоморфизм всех ее реализаций позволяют просто, без особого труда изложить основные факты геометрии Лобачевского, в том числе и теорию параллельных, используя наиболее подходящие для этого интерпретации.

В последней теме курса — проективная и другие геометрии — основная задача состоит в строгом аксиоматическом обосновании проективной геометрии. Другие геометрии обычно подаются в описательном плане. Обоснование проективной геометрии — также довольно большая по содержанию тема. Некоторое облегчение ее изложения достигается следующим образом.

Во-первых, вместо аксиом порядка, относящихся к понятию разделения пар, можно принять аксиомы следования троек. Это особенно целесообразно, если через отношение следования пар вводятся аксиомы порядка эвклидовой геометрии, так как получается преемственность в этих системах аксиом.

Во-вторых, после классического разрезания проективной плоскости по «бесконечно удаленной прямой» надо немедленно приступить к построению теории векторов, максимально используя при этом следствия аксиом связи, порядка, непрерывности и параллельности эвклидовой геометрии, а затем ввести афинные координаты. При этом оказывается возможным избежать дублирования соответствующего раздела эвклидовой геометрии и по ходу действия установить полноту системы аксиом афинной геометрии. Кроме того, строгое геометрическое обоснование теории векторов также весьма полезно. Установив полноту системы аксиом проективной геометрии, основные ее факты можно получить в аналитической реализации.

В предлагаемом пособии мы следовали указанным соображениям.

Общий план построения курса, а также детали некоторых доказательств заимствованы нами преимущественно из книги Н. В. Ефимова «Высшая геометрия».

ВВЕДЕНИЕ

Каждому, кто изучал элементарную геометрию, известно, что ее содержание составляют утверждения (теоремы), относящиеся к геометрическим фигурам, получаемые путем логических умозаключений в конечном счете из некоторого числа исходных положений (аксиом).

В связи с этим возникают три вопроса, которые в первую очередь рассматриваются в основаниях геометрии.

1) Так как исходные положения — аксиомы — также представляют собой некоторые утверждения, относящиеся к геометрическим фигурам, то не могут ли некоторые из них быть логически выведены из других; 2) нельзя ли получить путем логических рассуждений, опираясь на аксиомы, двух взаимно исключающих следствий; и, наконец, 3) нельзя ли систему аксиом дополнить новыми аксиомами, которые не вытекали бы из старых и вместе с тем не противоречили бы им.

Решение этих важных для аксиоматического построения геометрии вопросов было получено сравнительно недавно. Величайшая заслуга в этом принадлежит нашему соотечественнику Н. И. Лобачевскому. Его открытие неэвклидовой геометрии и связанное с этим установление независимости аксиомы параллельных положило начало многочисленным плодотворным исследованиям выдающихся математиков XIX века, в работах которых упомянутые вопросы в применении к элементарной геометрии получили полное разрешение.

ГЛАВА I

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК ОБОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. «Начала» Эвклида

Геометрия как эмпирическая наука в ранний период достигла особенно высокого уровня в Египте в связи с землемерными и ирригационными работами.

В первом тысячелетии до н. э. геометрические сведения от египтян перешли к грекам, в Греции начался новый этап в развитии геометрии. За период с VII по III век до н. э. греческие геометры не только обогатили геометрию многочисленными новыми фактами, но предприняли также серьезные шаги к строгому ее логическому обоснованию.

Многовековая работа греческих геометров за этот период была подытожена и систематизирована Эвклидом (330—275 гг. до н. э.) в его знаменитом труде «Начала». Это сочинение дает первое дошедшее до нас строгое логическое построение геометрии. В нем изложение настолько безупречно для своего времени, что в течение двух тысяч лет с момента появления «Начал» оно было единственным руководством для изучающих геометрию.

«Начала» включают тринадцать книг, из коих собственно геометрии посвящены книги I—IV и VI, где излагается планиметрия, а также XI—XIII, охватывающие стереометрию. Остальные книги «Начал» посвящены арифметике в геометрическом изложении.

Каждая книга «Начал» начинается определением понятий, которые встречаются впервые. Так, например, в первой книге даны 23 определения. В частности, Определение 1. Точка есть то, что не имеет частей.

Определение 2. Линия есть длина без ширины.

Определение 3. Прямая есть такая линия, которая одинаково расположена по отношению ко всем своим точкам.

В первой книге «Начал» за определениями следуют постулаты и аксиомы. Например:

Постулат I. Требуется, чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую.

Постулат V. Требуется, чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.

Аксиома I. Равные порознь третьему равны между собой.

Аксиома II. Если к равным прибавим равные, то получим равные.

И постулаты и аксиомы представляют собой утверждения, принимаемые без доказательства. По какому принципу одни утверждения относятся к постулатам, а другие к аксиомам, неизвестно.

Вслед за аксиомами идут теоремы и задачи на построение под общим названием «предложения», расположенные в строгой последовательности так, что доказательство (решение) каждого последующего предложения опирается на предыдущие. Вот одно из этих предложений.

Если в двух треугольниках две стороны одного равны двум сторонам другого и углы, содержащиеся между равными сторонами, равны, то и основание одного треугольника равно основанию другого, и один треугольник равен другому, и остальные углы одного треугольника равны остальным углам другого, именно равны углы, противолежащие равным сторонам.

Хотя «Начала» Эвклида и были в течение длительного времени образцом для сравнения, они далеко не достигают уровня современной строгости изложения. Данные в первой книге определения геометрических образов являются скорее описанием их, причем далеко не совершенными. Так, например, определение IV прямой линии не отличает ее от окружности, а определение II произвольной линии содержит упоминание о длине и ширине, которые сами нуждаются в определении.

Не следует думать, однако, что дефектны все определения, предпосланные первой книге «Начал». Напротив, целый ряд определений, в том числе окружности, треугольника, прямого, острого и тупого угла, либо безупречны, либо содержат незначительные, легко устранимые недостатки. Если при этом учесть, что свойства геометрических образов, содержащиеся в дефектных определениях, нигде в доказательствах не используются, то эти определения могут быть опущены без ущерба для изложения.

Что касается постулатов и аксиом, то их формулировки безупречны, содержащиеся в них утверждения существенны и составляют основу следующих за ними доказательств.

Обратимся, наконец, к доказательствам. По замыслу автора «Начал», доказательства всех предложений должны в конечном счете опираться на свойства геометрических образов, определяемые постулатами и аксиомами. Однако уже беглое знакомство с доказательствами Эвклида убеждает нас в том, что в них неоднократно используются такие свойства геометрических образов и отношения между ними, которые не выясняются ни постулатами, ни аксиомами. Так, например, в доказательстве упомянутого выше предложения о равенстве треугольников Эвклид пользуется движением, а в ряде других доказательств ссылается на свойства взаимного расположения точек на прямой, выражаемые словами «лежать между».

Возникает естественный вопрос, нельзя ли освободить эвклидовы доказательства от этого недостатка, заменив, может быть, их другими, опирающимися только на постулаты и аксиомы. Ответ на этот вопрос был получен сравнительно недавно. Оказалось, что это возможно сделать только после надлежащего пополнения системы постулатов и аксиом Эвклида. В главе III мы еще вернемся к этому вопросу.

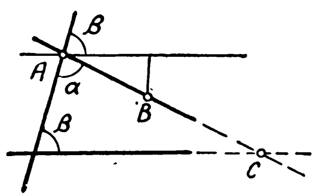
§ 2. Попытки доказательства пятого постулата

Некоторые из указанных выше недостатков «Начал» Эвклида были отмечены уже древними греками, в связи с чем предпринимались попытки улучшить изложение

«Начал». Главная задача, которую при этом ставили, заключалась в том, чтобы свести систему постулатов и аксиом Эвклида до минимума.

Естественный путь для решения этой задачи состоит в том, чтобы некоторые из постулатов и аксиом вывести из остальных. Именно таким путем «Начала» были освобождены от четвертого постулата, в котором идет речь о равенстве всех прямых углов.

Однако все попытки освободиться таким образом от пятого постулата были безрезультатными, хотя этим вопросом занимались геометры в течение более двух тысяч лет. Типичной ошибкой большинства доказательств пятого постулата являлось сознательное или бессознательное использование какого-либо утверждения, не содержащегося явно в остальных постулатах и аксиомах и не вытекающего из них.



Черт. 1.

Вот, например, доказательство Прокла.

Дано: $\alpha + \beta < 2d$ (см. черт. 1). Требуется доказать, что прямые g' и g'' пересекаются в некоторой точке C.

Проведем через точку A прямую g''', параллельную g'. Возьмем на прямой g'' точку B и опустим из нее перпендикуляр на g'''. Так как при удалении точки B от A ее расстояние от g''' неограниченно растет, *а расстояние между параллельными прямыми g' и g''' постоянно*, то на g'' найдется точка C, принадлежащая g'. В этой точке и пересекаются прямые g', g''.

Используемое в этом доказательстве свойство параллельных прямых не содержится явно в остальных постулатах и аксиомах. Более того, как мы увидим позже, оно из них не может быть выведено.

Существует бесчисленное множество других утверждений, с помощью которых можно было бы доказать пятый постулат. Например:

1. Все перпендикуляры к одной стороне некоторого острого угла пересекают его другую сторону.

2. Существуют подобные и неравные треугольники.

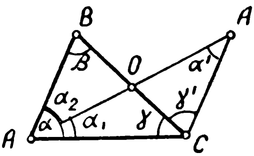
3. Существуют треугольники сколь угодно большой площади.

4. Существуют треугольники с суммой углов, равной двум прямым.

5. Через точку вне данной прямой можно провести не более одной прямой, ей параллельной.

Хотя попытки доказательства пятого постулата и не привели к желанному результату, они сыграли, безусловно, положительную роль в развитии геометрии, так как в ряде случаев обогатили ее новыми интересными теоремами, доказательство которых не опирается на пятый постулат. Одна из таких теорем, доказанная Лежандром, гласит:

В каждом треугольнике сумма углов не больше двух прямых.



Черт. 2.

Эта теорема используется в дальнейшем изложении. Поэтому мы приведем ее доказательство. Оно основано на двух леммах:

1. *В каждом треугольнике сумма двух внутренних углов меньше двух прямых.*

2. *Для каждого треугольника можно построить новый треугольник с той же суммой углов, у которого один из углов будет не больше половины наперед заданного угла данного треугольника.*

Согласно известной теореме, в доказательстве которой пятый постулат не используется, внешний угол треугольника больше любого внутреннего, не смежного с ним. Поэтому, если α и β — углы треугольника и α' — внешний угол, смежный α, то $\beta < \alpha'$. И так как $\alpha + \alpha' = \pi$, то $\alpha + \beta < \pi$.

Докажем вторую лемму. Пусть ABC — любой треугольник и α, β, γ — его углы (черт. 2).

Проведем из вершины A через средину O стороны BC прямую и отложим на ней из O отрезок OA', равный OA. Из равенства треугольников AOB и $A'OC$ следует $\alpha' = \alpha_2$, $\beta = \gamma'$. Отсюда

$$\beta + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1 + \alpha' + \gamma + \gamma'.$$

Здесь, в левой части равенства, стоит сумма углов данного треугольника ABC, а в правой части — сумма углов треугольника $AA'C$. Так как $\alpha' = \alpha_2$, а $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, то по крайней мере один из углов треугольника ACA' α' или α_1 будет не больше половины α.

Теперь нетрудно доказать теорему Лежандра. Пусть сумма углов некоторого треугольника $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. Применяя многократно лемму 2, мы можем построить треугольник, у которого сумма углов будет та же, т. е. $\pi + \varepsilon$, а один из углов — не больше $\frac{\alpha}{2^n}$. При достаточно большом n $\frac{\alpha}{2^n} < \varepsilon$, и, следовательно, сумма двух других углов этого треугольника больше π. А это противоречит первой лемме. И теорема доказана.

§ 3. Открытие неэвклидовой геометрии

Один из обнадеживающих способов подхода к доказательству пятого постулата, которым пользовались многие геометры XVIII и первой половины XIX века, состоял в следующем.

Пятый постулат заменяется его отрицанием или каким-либо утверждением, эквивалентным отрицанию. Опираясь на измененную таким образом систему постулатов и аксиом, доказываются всевозможные предложения, логически из нее вытекающие, подобно тому, как это делается в «Началах». Если пятый постулат действительно вытекает из остальных постулатов и аксиом, то измененная указанным образом система постулатов и аксиом противоречива. Поэтому рано или поздно мы придем к двум взаимно исключающим выводам. Этим и будет доказан пятый постулат.

Именно таким путем пытались доказать пятый постулат Саккери, Ламберт и Лежандр.

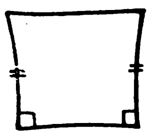
Саккери (1733 г.) рассматривает четырехугольник с двумя прямыми углами при основании и равными боковыми сторонами (черт. 3).

Относительно двух других углов этого четырехугольника, которые, как легко видеть, равны, могут быть три гипотезы: оба угла прямые, тупые или острые.

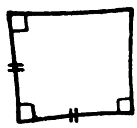
Саккери доказывает, что гипотеза прямого угла эквивалентна пятому постулату, т. е. постулировав ее, можно доказать пятый постулат, и, наоборот, приняв пятый постулат, доказать гипотезу прямого угла. Постулировав гипотезу тупого угла, Саккери приходит к противоречию и, наконец, постулирует гипотезу острого угла.

Здесь Саккери получает различные следствия, абсурдные с точки зрения привычных геометрических представлений. Например,

параллельные прямые имеют либо только один общий перпендикуляр, в обе стороны от которого неограниченно расходятся, либо не имеют ни одного, и, сближаясь асимптотически в одном направлении, неограниченно расходятся в другом.



Черт. 3.



Черт. 4.

Саккери не заключает о противоречии только на том основании, что полученные им выводы не соответствуют привычным представлениям о расположении прямых, и упорно ищет логическое противоречие. Такое противоречие им в конце концов было «найдено» однако в результате вычислительной ошибки.

Аналогичную конструкцию рассматривал Ламберт (1766 г.). Он брал четырехугольник с тремя прямыми углами (черт. 4) и подобно Саккери рассматривал три гипотезы для угла при четвертой вершине. Ламберт доказал, что гипотеза прямого угла эквивалентна пятому постулату, гипотеза тупого угла невозможна, а постулировав гипотезу острого угла подобно Саккери получил многочисленные следствия, обнаруживающие парадоксальные свойства в расположении прямых.

Ламберт, так же как и Саккери, не усматривает в этом противоречия. Логического же противоречия ему найти не удалось, и гипотеза острого угла им так и не была отвергнута.

Развивая систему следствий гипотезы острого угла, Ламберт обнаружил аналогию этой системы с геометрией на сфере и высказывает правильное предположение о том, что «эта гипотеза справедлива на какой-нибудь мнимой сфере». Среди геометров XVIII в. Ламберт ближе всех стоял к правильному решению вопроса о пятом постулате.

Лежандр в своем «доказательстве» пятого постулата рассматривал три гипотезы относительно суммы углов треугольника:

1. Сумма углов треугольника равна двум прямым.
2. Сумма углов треугольника больше двух прямых.
3. Сумма углов треугольника меньше двух прямых.

Лежандр доказал, что первая гипотеза эквивалентна пятому постулату, вторая гипотеза невозможна (§ 2); приняв, наконец, третью гипотезу, также приходит к противоречию, неявно воспользовавшись в доказательстве пятым постулатом через один из его эквивалентов.

Великий русский математик Н. И. Лобачевский (1793—1856 гг.), которому принадлежит честь открытия новой геометрии — геометрии Лобачевского, также начал с попытки доказательства пятого постулата.

Как указано выше (§ 2), один из эквивалентов пятого постулата состоит в утверждении, что через точку вне данной прямой проходит не более одной прямой, параллельной данной. Лобачевский заменил пятый постулат следующим:

Через точку вне прямой на плоскости проходят две прямые, не пересекающие данную.

Подобно предшественникам, Лобачевский имел надежду обнаружить противоречие в системе следствий так измененной системы Эвклида. Однако, развив свою систему до объема «Начал», Лобачевский не обнаружил в ней противоречий, и на этом основании сделал замечательный вывод о существовании геометрии, отличной от геометрии Эвклида, в которой пятый постулат не имеет места. Это было в 1826 году.

На первый взгляд вывод Лобачевского может показаться недостаточно обоснованным. В самом деле, где гарантия того, что, развивая его систему дальше, мы, наконец, не придем к противоречию. Однако это возражение в равной степени относится и к геометрии Эвклида. Так что с точки зрения логической непротиворечивости обе геометрии находятся в равном положении. Более того, как показали исследования геометров после Лобачевского, между этими геометриями существует тесная связь и логическая непротиворечивость одной находится в зависимости от логической непротиворечивости другой.

Таким образом, обе геометрии Эвклида и Лобачевского как логические системы равноправны. Вопрос о том, какая из этих геометрий лучше отражает пространственные отношения в окружающем нас мире, может быть решен только опытом. Это понимал и сам Лобачевский, который с этой целью произвел измерения суммы углов астрономического треугольника.

Лобачевский был первым, но не единственным геометром, заключившим о существовании геометрии, отличной от геометрии Эвклида.

К выводу о существовании новой геометрии пришел также Гаусс, о чем свидетельствуют его высказывания в письмах к современникам.

Три года спустя после выхода в свет работы Лобачевского венгерский математик Янош Боляи (1822—1860 гг.), не зная об исследованиях Лобачевского, опубликовал работу, в которой излагал ту же теорию, что и Лобачевский, но в менее развитой форме.

§ 4. Работы по основаниям геометрии во второй половине XIX в.

Немногие из современников Лобачевского поняли и признали сделанное им открытие. Большинство, а среди них многие крупные математики, относились к нему скептически.

Общему признанию геометрии Лобачевского в значительной степени способствовали работы геометров после Лобачевского. Среди этих работ прежде всего надо упомянуть работу Э. Бельтрами (1862 г.). Бельтрами доказал, что на поверхности постоянной отрицательной кривизны имеет место плоская геометрия Лобачевского, если прямые Лобачевского мыслить себе как геодезические линии, а движение понимать в смысле изометрического наложения поверхности на себя.

Этот результат был воспринят как доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского. Действительно, противоречию в геометрии Лобачевского соответствовало бы в указанной интерпретации противоречие в теории поверхностей эвклидова пространства, т. е. противоречие в эвклидовой геометрии.

Уязвимым местом доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского, основанного на интерпретации

Бельтрами, было то, что, как показал Гильберт, в эвклидовом пространстве не существует полной поверхности постоянной отрицательной кривизны без особенностей. И поэтому на поверхности постоянной отрицательной кривизны можно интерпретировать геометрию только части плоскости Лобачевского. Этот недостаток был устранен в появившихся позже интерпретациях Пуанкаре и Клейна.

Интерпретация Клейна плоской геометрии Лобачевского осуществляется внутри круга на эвклидовой плоскости, причем под прямыми понимаются хорды этого круга, а движениями называются коллинеации, сохраняющие окружность круга. Основанное на этой интерпретации доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского безупречно. Мы воспроизводим его в гл. III.

Доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского было вместе с тем доказательством независимости пятого постулата от остальных постулатов и аксиом Эвклида. Действительно, если бы пятый постулат был следствием остальных постулатов и аксиом, то геометрия Лобачевского была бы противоречива, так как содержала бы два взаимно исключающих утверждения — постулат Лобачевского и пятый постулат Эвклида.

Общая тенденция к строгости в математике, которой отмечены работы второй половины девятнадцатого века, и решение проблемы, связанной с пятым постулатом, поставили перед геометрами задачу полного исследования системы аксиом геометрии. Эти исследования показали, что система аксиом Эвклида далеко не совершенна. И прежде всего она не полна. Как мы увидим позже (гл. II), в ней опущены целые группы аксиом, совершенно необходимые для проведения безупречных доказательств.

В связи с этим геометры второй половины XIX в. пополнили систему аксиом Эвклида недостающими аксиомами. Так, Паш (1882 г.) пополнил систему аксиом Эвклида группой аксиом порядка. Одна из этих аксиом носит его имя (аксиома Паша).

Исследование аксиоматики эвклидовой геометрии было завершено Д. Гильбертом (1899 г.). Система аксиом, данная Гильбертом, состоит из пяти групп: аксиомы связи, аксиомы порядка, аксиомы конгруентности, аксиомы непрерывности и аксиома параллельности. Аксиомы этих пяти групп относятся к объектам трех родов — точкам, прямым, плоскостям и трем отношениям между ними, выражаемым словами «принадлежит», «между», «конгруентен». Что такое точка, прямая и плоскость и каков конкретный смысл указанных отношений, Гильберт не уточняет. И все, что предполагается известным о них, это то, что выражено в аксиомах. Благодаря этому, построенная на основе аксиом Гильберта геометрия допускает конкретные реализации, очень далекие от привычных представлений. В качестве примера можно привести арифметическую реализацию, рассмотренную в гл. III.

Гильберт подвергнул предложенную им систему аксиом глубокому и всестороннему исследованию. В частности, он доказал, что его система аксиом непротиворечива, если непротиворечива арифметика. Далее, Гильберт доказал независимость некоторых аксиом, помимо аксиомы параллельных. Наконец, Гильберт исследовал вопрос о том, как далеко можно развить геометрию, если класть в ее основу те или иные группы аксиом, на которые вся система расчленяется.

Работой Гильберта были в основном завершены многовековые исследования по обоснованию элементарной геометрии. Эта работа получила очень высокую оценку современников и была отмечена премией им. Лобачевского в 1903 году.

В современном аксиоматическом изложении геометрии Эвклида не всегда пользуются аксиоматикой Гильберта. Часто берут эквивалентную систему аксиом. Так, приведенная в следующей главе система аксиом отличается от системы Гильберта во второй и третьей группе. Преимущество ее заключается в том, что она позволяет проще и быстрее получить первоначальные геометрические факты, облегчающие изложение. Кроме того, она, как нам кажется, лучше описывает свойства основных геометрических объектов с точки зрения привычных представлений.

ГЛАВА II

СОВРЕМЕННОЕ АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ЭВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Аксиомы связи. Следствия из аксиом связи

Аксиоматическое изложение эвклидовой геометрии, содержащееся в настоящей главе, опирается на пять групп аксиом: аксиомы связи, аксиомы порядка, аксиомы движения, аксиома непрерывности и аксиома параллельности.

В первой группе аксиом речь идет о свойствах взаимного расположения точек, прямых и плоскостей, выражаемых словом «принадлежать». При этом считаются равнозначными выражения: точка A принадлежит прямой a, точка A лежит на прямой a и прямая a проходит через точку A, а также точка A принадлежит плоскости α, точка A лежит в плоскости α и плоскость α проходит через точку A.

Мы будем говорить, что прямые a и b пересекаются в точке C, если точка C принадлежит прямой a и прямой b; что прямая a принадлежит плоскости α, или плоскость α проходит через прямую a, если каждая точка прямой a (принадлежащая прямой a) принадлежит плоскости α. Наконец, мы будем говорить, что плоскости α и β пересекаются по прямой c, если каждая из этих плоскостей проходит через прямую c.

Первая группа содержит следующие восемь аксиом:

Аксиома I_1 *Каковы бы ни были две точки* A и B, существует прямая c, проходящая через точку A и через точку B.*

* Здесь и всюду в дальнейшем, когда мы говорим «две точки» (прямые, плоскости), мы имеем в виду различные точки (прямые, плоскости).

Аксиома I_2. *Каковы бы ни были две точки A и B, существует не более одной прямой, которая проходит через эти точки.*

Аксиома I_3. *На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.*

Аксиома I_4. *Каковы бы ни были три точки A, B, C, существует плоскость σ, проходящая через каждую из этих точек. На каждой плоскости лежит хотя бы одна точка.*

Аксиома I_5. *Каковы бы ни были три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, существует не более одной плоскости, проходящей через каждую из этих точек.*

Аксиома I_6. *Если две точки A и B прямой g (т. е. принадлежащие прямой g) лежат на плоскости σ, то прямая g лежит на плоскости σ.*

Аксиома I_7. *Если две плоскости α и β имеют одну общую точку C (точку, лежащую на каждой из этих плоскостей), то они имеют еще по крайней мере одну общую точку D.*

Аксиома I_8. *Существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.*

Из аксиом связи могут быть выведены различные, правда немногочисленные, следствия. Приведем некоторые из них.

Теорема 1. *Две прямые имеют не более одной общей точки; две плоскости либо не имеют общих точек, либо имеют общую прямую; плоскость и не лежащая на ней прямая имеют не более одной общей точки.*

Доказательство. Первое утверждение следует из аксиомы I_2. Докажем второе утверждение. Пусть плоскости α и β имеют общую точку P. По аксиоме I_7 они тогда имеют еще общую точку Q. Прямая, проходящая через P и Q по аксиоме I_6, принадлежит α и β. И утверждение доказано. Третье утверждение следует из аксиомы I_6.

Теорема 2. *Через прямую и не лежащую на ней точку, а также через две пересекающиеся прямые проходит одна и только одна плоскость.*

Доказательство. Пусть точка B не лежит на прямой a. На прямой a лежат две точки P и Q (аксиома I_3). Существует плоскость α, проходящая через точки B, P, Q (аксиома I_4). По аксиоме I_6 плоскость α проходит через прямую a. Другой плоскости, проходящей через прямую a и точку B, не существует, так как, проходя через точки B, P, Q, не лежащие на одной прямой, она определяется однозначно (аксиома I_5).

Докажем второе утверждение. Пусть прямые a и b пересекаются в точке C. По аксиоме I_3 на прямой a есть точка A, а на прямой b — точка B, отличные от C. Точки A, B, C не лежат на одной прямой. По аксиоме I_4 существует плоскость σ, проходящая через точки A, B, C. Эта плоскость проходит через прямые a и b (аксиома I_6). Единственность следует из аксиомы I_5.

Теорема 3. *Каждая плоскость содержит по крайнгй мере три точки, не лежащие на одной прямой.*

Доказательство. Пусть данная плоскость будет α. По аксиоме I_4 на ней лежит точка A. По аксиоме I_8 существуют четыре точки B, B_1, B_2, B_3, не лежащие в одной плоскости. По крайней мере одна из них, например B, не лежит в плоскости α. Среди трех плоскостей ABB_1, ABB_2, ABB_3 есть по крайней мере две β_1 и β_2 различные, в противном случае точки B, B_1, B_2, B_3 лежали бы в одной плоскости. Так как плоскостям β_1 и β_2 принадлежит точка B, не принадлежащая плоскости α, то прямые a_1 и a_2 пересечения плоскостей β_1 и β_2 с плоскостью α различны (теорема 2). На каждой из прямых a_1 и a_2, кроме A, лежат точки A_1 и A_2, отличные от A (в силу аксиомы I_3). Три точки A, A_1, A_2 лежат в плоскости α, но не лежат на одной прямой.

Теорема доказана.

§ 2. Аксиомы порядка. Взаимное расположение точек на прямой и плоскости

Аксиомы порядка устанавливают свойства взаимного расположения точек на прямой и плоскости.

Мы полагаем, что на прямой есть два взаимно противоположных направления и по отношению к каждому из них каждая пара точек A и B находится в известном отношении, которое выражается словом «предшествовать».

Это отношение обозначается знаком $<$. Так что выражение «A предшествует B» символически записывается так:

$$A < B.$$

Требуется, чтобы указанное отношение для точек на прямой удовлетворяло нижеследующим пяти аксиомам.

Аксиома II_1. *Если $A < B$ в одном направлении, то $B < A$ в противоположном направлении.*

Аксиома II_2. *В одном из двух направлений $A < B$ исключает $B < A$.*

Аксиома II_3. *В одном из двух направлений, если $A < B$,* а $B < C$, то $A < C$.

Аксиома II_4. *В одном из двух направлений для каждой точки B найдутся точки A и C такие, что $A < B < C$.*

Каждое из утверждений аксиом II_2—II_4 относится к одному из двух направлений на прямой. По аксиоме II_1 оно верно также и для другого (противоположного) направления.

Прежде чем сформулировать последнюю аксиому, определим некоторые понятия. Пусть a — прямая и A — точка на ней. При фиксированном направлении на прямой точка A разбивает ее на две части *(полупрямые)* для каждой точки X одной из них $X < A$, а для каждой точки X другой $A < X$. Очевидно, это разбиение прямой на части не зависит от выбранного на ней направления (аксиома II_1).

Пусть A и B — две точки на прямой a. Если для точки C прямой a выполняется условие $A < C < B$ или $B < C < A$, то мы будем говорить, что точка C лежит *между* точками A и B. Очевидно, свойство точки лежать между двумя данными не зависит от направления на прямой. Часть прямой a, все точки которой лежат между A и B, мы будем называть *отрезком AB*, а точки A и B — концами отрезка.

Аксиома II_5. *Прямая a, лежащая в плоскости α, разбивает эту плоскость на две части (полуплоскости) так, что если X и Y две точки одной полуплоскости, то отрезок XY не пересекается с прямой a, если же X и Y принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок XY пересекается с прямой a.*

Мы будем говорить, что две точки X и Y плоскости α расположены по одну сторону прямой a, или по разные стороны, смотря по тому, принадлежат они одной или разным полуплоскостям, на которые a разбивает α.

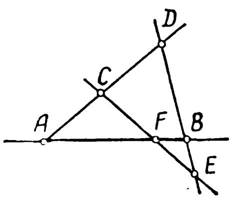
Рассмотрим некоторые следствия аксиом связи и аксиом порядка.

Теорема 4. *Среди трех точек A, B, C, на прямой g одна и только одна лежит между двумя другими.*

Доказательство. В одном из двух направлений на прямой g $A < C$. Если B не лежит между A и C, то это значит либо $B < A$, либо $C < B$. Но в первом случае A лежит между B и C, а во втором C лежит между A и B. Теорема доказана.

Теорема 5. *Каждый отрезок содержит по крайней мере одну точку.*

Доказательство. Пусть A и B—концы отрезка (черт. 5). По аксиоме I_3 вне прямой AB есть точка C. Возьмем на прямой AC точку D так, чтобы C была между A и D. Это возможно по аксиоме II_4. Возьмем на прямой BD точку E так, чтобы B была между D и E. Прямая CE разбивает плоскость на две полуплоскости. Точки B и D находятся в одной полуплоскости, так как отрезок BD не пересекает прямую CE, а точки A и D в разных полуплоскостях, так как отрезок AD пересекает прямую CE (в точке C). Отсюда следует, что точки A и B в разных полуплоскостях, а значит, отрезок AB пересекает прямую CE. Точка пересечения F и есть точка отрезка AB.



Черт. 5.

Теорема 6. *Если B — точка отрезка AC, то отрезки AB и BC принадлежат AC, т. е. каждая точка отрезка AB и каждая точка отрезка BC принадлежит отрезку AC.*

Доказательство. В одном из двух направлений на прямой, содержащей отрезок AC, будет $A < C$. Так как B принадлежит отрезку AC, то $A < B < C$. Если X — точка отрезка AB, то $A < X < B$ и, следовательно, $A < X < C$, т. е. X принадлежит отрезку AC. Аналогично показывается, что точка Y отрезка BC принадлежит отрезку AC.

Теорема 7. *Если B — точка отрезка AC и X — точка этого отрезка, отличная от B, то либо она принадлежит отрезку AB, либо BC.*

Доказательство. В одном из двух направлений на прямой $A < C$. Так как B принадлежит отрезку AC, то $A < B < C$. Для точки X имеем либо $X < B$, либо $B < X$. В первом случае, так как $A < X < C$ и, следовательно,

$A < X < B$, точка X принадлежит отрезку AB, а во втором — отрезку BC.

Теорема 8. *Пусть α — плоскость и a — лежащая на ней прямая, b — другая прямая, или полупрямая, или отрезок в той же плоскости α.*

Тогда, если b не пересекает a, то все точки b лежат по одну сторону от a, т. е. в одной из полуплоскостей, определяемых прямой a.

Действительно, если точки X и Y, принадлежащие b, лежат по разные стороны от a, то отрезок XY пересекает a. А так как все точки отрезка XY принадлежат b, то b пересекает a, что противоречит условию теоремы.

Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой. Фигура, составленная из трех отрезков AB, BC и CA, называется *треугольником*, точки A, B, C — *вершинами* треугольника, а отрезки AB, BC, AC — *сторонами*.

Теорема 9. *Пусть ABC — треугольник в плоскости α и a — прямая в этой плоскости, не проходящая ни через одну из точек A, B, C. Тогда, если эта прямая пересекает сторону AB, то она пересекает и притом только одну из двух других сторон BC или AC.*

Доказательство. Прямая a разбивает плоскость α на две полуплоскости (аксиома II_5). Точки A и B лежат в разных полуплоскостях. Если точка C лежит в той же полуплоскости, что и B, то a пересекает AC, но не пересекает BC. Если точка C лежит в той же полуплоскости, что и A, то a пересекает BC и не пересекает AC. Теорема доказана.

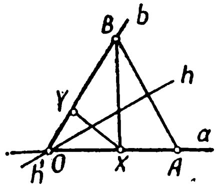
Замечание. Система аксиом порядка, которой мы пользовались, отличается от системы аксиом порядка Гильберта, в основу которой положено отношение, выражаемое словами «лежать между». Теорема 9, без утверждения единственности, является одной из аксиом порядка Гильберта. Она была введена еще Пашем и называется аксиомой Паша.

§ 3. Взаимное расположение лучей в пучке. Угол

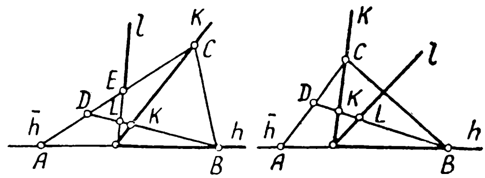
Теорема 10. *Пусть из точки O исходят две полупрямые a и b, не принадлежащие одной прямой. Тогда, если полупрямая h, исходящая из точки O, пересекает отрезок AB с концами на полупрямых a и b, то она пересе-*

кает любой другой отрезок с концами на этих полупрямых.

Действительно, по теореме 8 отрезки AB и XY, полупрямые a и h находятся в одной из полуплоскостей, определяемых прямой, содержащей b, а дополнение h' полупрямой h до прямой (мы ее обозначим c) находится в другой полуплоскости. Применяя теорему 9 к треугольникам ABX и BXY и прямой c последовательно, заключаем, что она пересекает BX и YX. Так как h' и XY находятся в разных полуплоскостях и, следовательно, не пересекаются, то отсюда следует, что h пересекает XY (черт. 5 a).



Черт. 5а.



Черт. 6.

Отмеченное в теореме свойство позволяет определить отношение «*между*» для полупрямых *(лучей)* следующим образом. Мы будем говорить, что луч l, исходящий из точки O, находится между лучами h и k, исходящими из этой точки и не лежащими на одной прямой, если l пересекает каждый отрезок HK с концами на полупрямых h и k.

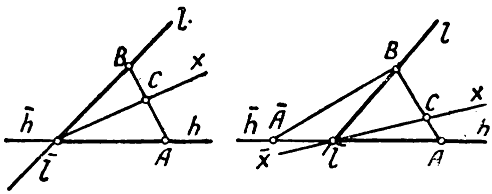
Теорема 11. *Пусть h, k, l — три луча, лежащие в плоскости, исходящие из точки O. Тогда, если лучи k и l лежат в одной полуплоскости α', определяемой лучом h и его продолжением $\bar{h}$, то один из трех лучей находится между двумя другими.*

Доказательство. Возьмем три точки: A на $\bar{h}$, B на h и C на k. Выберем на AC точку D по следующему правилу. Если l не пересекает AC, то D — любая точка отрезка AC. Если l пересекает AC в точке E, то за D берем любую точку отрезка AE (черт. 6).

По теореме 9 в применении к треугольнику ADB лучи k и l пересекают BD в точках K и L. При этом, если L между B и K, то l между k и h, если K между B и L, то k между h и l. Теорема доказана.

Теорема 12. *Пусть имеем четыре луча, исходящие из точки O: h, k, l, m. Тогда, если l находится между h и m, а k между h и l, то k находится между h и m. Если k и l находятся между h и m, то k находится либо между l и m, либо между h и l.*

Доказательство. Возьмем на лучах h и m точки H и M. Отрезок HM пересекает лучи k и l в точках K и L. Теперь первое утверждение следует из теоремы 6, а второе — из теоремы 7.



Черт. 7.

Пусть h и l — лучи, исходящие из одной точки O, не принадлежащие одной прямой. *Углом* (h, l) мы будем называть совокупность всех лучей, исходящих из точки O и расположенных между лучами h и l. Лучи h и l называются *сторонами угла*, а точка O — его *вершиной*.

Теорема 13. *Каждый луч x угла (h, l) проходит в полуплоскости, определяемой лучом h и его продолжением $\bar{h}$, содержащей луч l, и в полуплоскости, определяемой лучом l и его продолжением $\bar{l}$, содержащей луч h. Обратно, каждый луч, проходящий указанным образом, принадлежит углу (h, l).*

Доказательство. Пусть AB — отрезок с концами на h и l (черт. 7). Если x принадлежит (h, l), то он пересекает AB в некоторой точке C. По теореме 8, C принадлежит указанным полуплоскостям. И следовательно, по той же теореме им принадлежит x.

Пусть теперь x принадлежит полуплоскостям. Покажем, что он принадлежит углу (h, l). Возьмем на $\bar{h}$ точку $\bar{A}$. Прямая, содержащая x, пересекает или AB, или $\bar{A}B$. Точка пересечения C не может быть на продолжении $\bar{x}$ луча x, так как оно находится в другой полуплоскости. Следовательно, x пересекает AB или $\bar{A}B$. Но $\bar{A}B$ пересекать x не может, так как в противном случае

C и A лежат в разных полуплоскостях, определяемых лучом l и его продолжением. Итак, луч x пересекает AB. Теорема доказана.

§ 4. Аксиомы движения. Конгруентность фигур

Переходя к аксиомам третьей группы, мы вводим новое понятие «движение».

Мы требуем, чтобы существовали отображения точек, прямых и плоскостей на точки, прямые и плоскости, именуемые движениями, удовлетворяющие следующим аксиомам.

Аксиома III_1. *Каждое движение H сохраняет отношение принадлежности.* То есть, если точка A принадлежит прямой a (плоскости α), то ее образ при движении H (мы будем обозначать его HA) принадлежит образу прямой Ha (соответственно образу плоскости $H\alpha$).

Аксиома III_2. *Каждое движение H сохраняет отношение порядка на прямой.* То есть, каждому из двух направлений на прямой a можно сопоставить такое направление на прямой Ha, что каждый раз, когда для точек X и Y прямой a имеет место $X < Y$, для соответствующих им точек прямой Ha имеет место $HX < HY$.

Из аксиом III_1 и III_2 следует, что каждое движение переводит полупрямую в полупрямую, полуплоскость в полуплоскость.

Аксиома III_3. *Движения образуют группу.*

Это значит:

а) Сопоставление H^0 каждому элементу x (точке, прямой, плоскости) его самого есть движение. Это движение называется тождественным.

б) Если движение H_1 сопоставляет произвольному элементу x элемент y, а движение H_2 сопоставляет y элемент z, то сопоставление элементу x элемента z есть движение. Оно обозначается H_2H_1 и называется *произведением* движений H_2 и H_1.

в) Для каждого движения H существует движение H^{-1} такое, что $H^{-1}H = H^0$.

Аксиома III_4. *Если при движении H полупрямая h, как целое, и ее начальная точка A остаются неподвижными, то все точки полупрямой h остаются неподвижными.* То есть, если $Hh = h$ и $HA = A$, то для любой точки X полупрямой $HX = X$.

Аксиома III_5. *Для каждой пары точек A и B существует движение H, которое переставляет их местами: $HA = B$, $HB = A$.*

Аксиома III_6. *Для каждой пары лучей h, k (полупрямых), исходящих из одной точки, существует движение H, их переставляющее: $Hh = k$, $Hk = h$.*

Аксиома III_7. *Пусть α и β — любые плоскости, a и b — прямые в этих плоскостях, A и B — точки на прямых a и b. Тогда существует и притом единственное движение, которое переводит точку A в B, заданную полупрямую прямой a, определяемую точкой A,— в заданную полупрямую прямой b, определяемую точкой B, заданную полуплоскость плоскости α, определяемую прямой a,— в заданную полуплоскость плоскости β, определяемую прямой b.*

Теорема 14. *Пусть α — плоскость и a — принадлежащая ей прямая. Тогда, если движение H переводит каждую из полуплоскостей плоскости α, определяемых прямой a, в себя и оставляет неподвижными точки прямой a, то оно является тождественным.*

Действительно, тождественное движение H^0 обладает указанными в теореме свойствами H, а следовательно, по аксиоме III_7 совпадает с ним.

Определим теперь важное в геометрии понятие конгруентности. Фигуру F_1 мы будем называть *конгруентной* фигуре F_2, если существует движение H, переводящее F_1 в F_2 : $HF_1 = F_2$. Из групповых свойств движения (аксиома III_3) вытекают следующие свойства отношения конгруентности:

1. *Каждая фигура F конгруентна сама себе.* Действительно, тождественное движение H^0 переводит F в F.

2. *Если фигура F_1 конгруентна F_2, то фигура F_2 конгруентна F_1.*

В самом деле, если H — движение, которое переводит фигуру F_1 в F_2, то движение H^{-1} переводит фигуру F_2 в фигуру F_1.

3. *Если фигура F_1 конгруентна F_2, а фигура F_2 конгруентна фигуре F_3, то фигура F_1 конгруентна F_3.*

Действительно, если H' — движение, которое переводит F_1 в F_2, а H'' — движение, переводящее F_2 в F_3, то движение $H''H'$ переводит F_1 в F_3.

Замечание. Третья группа аксиом Гильберта отличается от группы аксиом движения. Аксиомы Гильберта определяют отношение конгруентности.

§ 5. Конгруентность отрезков, углов, треугольников

Докажем некоторые теоремы о конгруентности простейших фигур — отрезков, углов, треугольников. Условимся для краткости записи конгруентность обозначать знаком равенства.

Теорема 15. *Отрезки AB и BA конгруентны. Углы (h, k) и (k, h) конгруентны.*

Конгруентность отрезков следует из аксиомы III_5. Конгруентность углов следует из аксиомы III_6.

Теорема 16. *Пусть дан отрезок AB и луч h, исходящий из O. Тогда на h существует и притом единственная точка P такая, что $AB = OP$.*

Доказательство. Существование P следует из аксиомы III_7. Докажем единственность. Допустим, существует две точки P_1 и P_2. Так как $OP_1 = OP_2$, то существует движение H такое, что $HO = O$, $HP_1 = P_2$. Это движение переводит h в себя. По аксиоме III_4 $HP_1 = P_1$. Следовательно, $P_1 \equiv P_2$.

Теорема 17. *Пусть (h, k) — угол и l — луч, ограничивающий вместе со своим продолжением l полуплоскость α. Тогда существует в α луч m и притом единственный такой, что $(h, k) = (l, m)$.*

Доказательство. Существование луча m следует из аксиомы III_7. Докажем единственность. Допустим, существует два луча m_1 и m_2. Так как $(l, m_1) = (l, m_2)$, то существует движение H такое, что $Hl = l$, $Hm_1 = m_2$. Это движение переводит полуплоскость α в себя. По аксиоме III_4 H тождественно на l и его дополнении $\bar{l}$. Отсюда по теореме 14 следует, что H тождественно на α. В частности, $Hm_1 = m_1$. Отсюда $m_1 \equiv m_2$.

Теорема 18. *Пусть AB и $A'B'$ — два отрезка, C и C' — точки этих отрезков. Тогда, если*

$$AB = A'B' \text{ и } AC = A'C', \text{ то } BC = B'C'.$$

Если

$$AC = A'C' \text{ и } BC = B'C', \text{ то } AB = A'B'.$$

Доказательство. По аксиоме III_7 существует движение H, которое переводит точку A' в A, полупрямую $A'B'$ в полупрямую AB. При этом точки B' и C' перейдут в

B''и C''. По теореме 16, $B'' \equiv B$, $C'' \equiv C$, то есть H переводит отрезок $B'C'$ в BC. Отсюда $BC = B'C'$.

Второе утверждение доказывается аналогично.

Теорема 19. *Пусть* (h, k) *и* (h', k') *— два угла,* l *и* l' *— лучи, принадлежащие этим углам. Тогда если*

$$(h, k) = (h', k') \text{ и } (h, l) = (h', l'), \text{ то } (l, k) = (l', k').$$

Если

$$(h, l) = (h', l') \text{ и } (l, k) = (l', k'), \text{ то } (h, k) = (h', k').$$

Доказательство. По аксиоме III_7 существует движение H, которое переводит луч h' в h и полуплоскость, определяемую лучом h' и его продолжением, содержащую лучи l' и k', в полуплоскость, определяемую лучом h и его продолжением, содержащую лучи l и k. При этом лучи l' и k' переходят в l'' и k''. По теореме 17, $k'' \equiv k$ $l'' \equiv l$, т. е. H переводит угол (l', k') в (l, k). Отсюда $(l, k) = (l', k')$.

Второе утверждение доказывается аналогично.

Пусть (h, k) — некоторый угол, $\bar{h}$ и $\bar{k}$ — лучи, дополняющие h и k до прямых. Тогда угол $(k, \bar{h})$ называется смежным к (h, k), а угол $(\bar{h}, \bar{k})$ — *вертикальным* к (h, k).

Теорема 20. *Если углы* (h, k) *и* (h', k') *равны, то смежные с ними углы* $(h, \bar{k})$ *и* $(h', \bar{k}')$ *равны.*

Угол (h, k) *равен вертикальному* $(\bar{h}, \bar{k})$.

Доказательство. Так как $(h, k) = (h', k')$, то существует движение H такое, что $Hh' = h$, $Hk' = k$. В силу аксиом III_1 и III_2 $H\bar{k}' = \bar{k}$. Следовательно, $(h\bar{k}) = (h'\bar{k}')$.

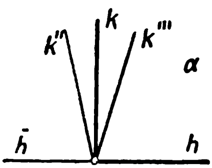
По аксиоме III_6 существует движение S такое, что $S\bar{k} = h$, $Sh = \bar{k}$. В силу аксиом III_1 и III_2 $Sk = \bar{h}, S\bar{h} = k$. Отсюда $(h, k) = (\bar{h}, \bar{k})$. Теорема доказана.

Угол, равный смежному, называется *прямым*. Докажем существование прямых углов. Возьмем плоскость α, на ней прямую a и на прямой точку A. Пусть α' и α'' — две полуплоскости, определяемые прямой a и h — одна из полупрямых прямой a, на которые ее разбивает точка A. По аксиоме III_7 существует такое движение H, что $H\alpha' = \alpha''$, $Hh = h$, $HA = A$. По аксиоме III_4 H тождественно на a. Пусть B' — точка в полуплоскости α'. Соединим ее с точкой $B'' = HB'$ прямой b. Пусть C — точка пересечения прямых a и b. Точка C разбивает прямую a на полупрямые a' и a'', а прямую b — на полупрямые b'

и b''. Очевидно, $Ha' = a'$, $Hb' = b''$. Поэтому угол (a', b') равен смежному (a', b'').

Теорема 21. *Все прямые углы равны.*

Доказательство. Черт. 8. Пусть (h, k) и (h', k') — прямые углы. Пусть α — плоскость угла (h, k) и α' — та его полуплоскость, определяемая лучом h и его продолжением, где лежит луч k. По аксиоме III_7 существует движение H, которое h' переводит в h, а луч k' — в луч k'', расположенный в полуплоскости α'.



Черт. 8.

Обозначим S движение, переводящее h в его дополнение $\bar{h}$, а луч k в себя. Это возможно, так как $(h, k) = (\bar{h}, k)$. Движение S переводит луч k'' в некоторый луч k'''. Углы (k'', h) и $(k''', \bar{h})$ равны как углы, полученные движением из равных углов.

По теореме 17, k'' совпадает с k'''. Так как полуплоскости, определяемые лучом k и его продолжением, при движении S переставляются, то это возможно тогда и только тогда, если k'' совпадает с k. Но это значит, что $(h, k) = (h, k'')$ и, следовательно, $(h, k) = (h', k')$. Теорема доказана.

Пересекающиеся прямые называются *перпендикулярными*, если их полупрямые, определяемые точкой пересечения, образуют прямой угол.

Теорема 22. *Пусть a — прямая в плоскости α. Тогда через каждую точку B плоскости α проходит прямая b, перпендикулярная a и притом единственная.*

Доказательство. Если точка B принадлежит a, то теорема следует из равенства всех прямых углов и теоремы 17.

Пусть B не лежит на a. Существует движение H, тождественное на прямой a и переставляющее полуплоскости плоскости α, определяемые прямой a. Прямая, соединяющая B и HB, перпендикулярна a.

Допустим, существуют две прямые, проходящие через B, перпендикулярные a: b_1 и b_2. Движение H переводит каждую из прямых b_1 и b_2 в себя. Отсюда следует, что точка HB — общая для этих прямых. А это противоречит аксиоме I_2. Теорема доказана.

Теорема 23. *Если у треугольников ABC и $A'B'C'$ $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $\angle A = \angle A'$, то они конгруентны.*

Доказательство. Так как $\angle A = \angle A'$, то существует движение H, которое переводит точку A' в точку A, полупрямую $A'B'$ в полупрямую AB, полупрямую $A'C'$ в полупрямую AC. По теореме 16, H переводит точку B' в B и C' в C. Теорема доказана.

Треугольник называется *равнобедренным*, если у него две стороны равны. Они называются боковыми сторонами. Третья сторона называется *основанием*.

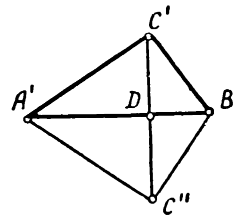
Теорема 24. *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.*

Эта теорема непосредственно следует из предыдущей.

Теорема 25. *Если у треугольников ABC и $A'B'C'$ $AB = A'B'$, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, то они конгруентны.*

Доказательство. Существует движение, которое переводит точку A в A', полупрямую AB в полупрямую $A'B'$, полупрямую AC в полупрямую $A'C'$ По теореме 16 точка B при этом переходит в B' А по теореме 17 полупрямая BC переходит в $B'C'$, так как $\angle B = \angle B'$. Отсюда следует, что C переходит в C'. И теорема доказана.

Теорема 26. *Если у треугольников ABC и $A'B'C'$ $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $BC = B'C'$ то они конгруентны.*



Черт. 9.

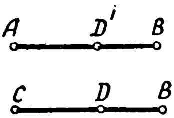
Доказательство Черт 9 Существует движение, которое переводит полупрямую AB в $A'B'$ и совмещает плоскости треугольников так, что точка C' и точка C'', в которую переходит C, располагаются в разных полуплоскостях, определяемых прямой $A'B'$. По теореме 16 это движение переводит точку B в B'.

Треугольники $C'A'C''$, $C'B'C''$ равнобедренные и $C'C''$ является их общим основанием Пусть D — пересечение отрезка $C'C''$ с прямой $A'B'$ Так как полупрямые $C'A'$, $C'D$, $C'B'$ и $C''A'$, $C''D$ $C''B'$ находятся в одинаковом отношении порядка (он определяется порядком точек A', D, B'), а углы при основании равнобедренного треугольника равны, то по теореме 19 угол между полупрямыми $C'A'$ и $C'B'$ равен углу между полупрямыми $C''A'$ и $C''B'$. Отсюда угол C треугольника ABC равен углу C' треугольника $A'B'C'$ А теперь по теореме 23 треугольники ABC и $A'B'C'$ конгруентны. Теорема доказана.

§ 6. Сравнение отрезков и углов и операции над ними

Движение позволяет производить сравнение отрезков и углов.

Пусть AB и CD — неравные отрезки. Переведем движением полупрямую CD в полупрямую AB. При этом точка D перейдет в некоторую точку D', отличную от B. Мы будем говорить, что AB меньше CD и записывать $AB < CD$, если B находится между A и D'. Будем говорить, что AB больше CD $(AB > CD)$, если D' между A и B.



Черт. 10.

Если $AB > CD$, *то* $CD < AB$.

Действительно, переведем движением полупрямую AB в полупрямую CD. При этом B перейдет в B', а D' в D (черт. 10). Следовательно, точки A, B, D' и C, B', D находятся в одинаковом отношении порядка (аксиома III_2). И из того, что D' между A и B, следует, что D между C и B', то есть из $AB > CD$ следует $CD < AB$.

Если $AB = A'B'$, $CD = C'D'$ *и* $AB < CD$, *то* $A'B' < C'D'$.

Это утверждение доказывается рассуждением, подобным предыдущему. Представляем его читателю.

Если $AB < CD$, *а* $CD < EF$, *то* $AB < EF$.

В силу предыдущего свойства достаточно доказать это утверждение для случая, когда точки A, C и E совпадают с некоторой точкой O, а остальные точки B, D, F располагаются на полупрямой, исходящей из O. Но в этом случае оно следует из теоремы 6.

Для углов отношения «больше» и «меньше» определяются аналогично и обладают аналогичными свойствами.

Определим теперь операции сложения и вычитания для отрезков.

Пусть AB и CD — данные отрезки. Построим на продолжении полупрямой AB точку D' такую, чтобы $CD = AD'$ *Суммой* отрезков AB и CD будем называть отрезок, равный BD', и будем обозначать $AB + CD$.

Сложение отрезков обладает следующими свойствами:

1. Если $a = a'$, а $b = b'$, то
$$a + b = a' + b'.$$

2. $$a + b = b + a.$$

3. $$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Доказательство этих свойств не составляет труда и предоставляется читателю.

Пусть AB и CD — два отрезка, причем $AB > CD$. Построим на полупрямой AB точку D' такую, чтобы $AD' = CD$. *Разностью* отрезков AB и CD будем называть отрезок, равный $D'B$ и будем обозначать $AB - CD$.

Нетрудно доказать, что

$$CD + (AB - CD) = AB.$$

Для того чтобы определить сложение и вычитание для углов, обобщим понятие угла. Пусть h и k — два луча, исходящие из общей точки O, и α — одна из полуплоскостей угла, определяемая лучом h и его продолжением.

Обозначим $(h, k)_\alpha^S$ совокупность лучей, взятых с определенной кратностью, определяемую следующим образом. Если k принадлежит α, то $(h, k)_\alpha^1$ состоит из лучей, расположенных между h и k. Если k совпадает с продолжением h, то $(h, k)_\alpha^1$ состоит из лучей, расположенных в полуплоскости α. Если k лежит в полуплоскости, дополнительной к α, то $(h, k)_\alpha^1$ состоит из лучей, лежащих в полуплоскости α, и лучей, лежащих между k и продолжением h. Наконец, если h и k совпадают, $(h, k)_\alpha^1$ состоит из всех лучей, исходящих из O.

Множество лучей $(h, k)_\alpha^S$ состоит из множества $(h, k)_\alpha^1$ и $S - 1$ раз взятого множества всех лучей, исходящих из O.

Теперь мы называем углом каждое множество лучей вида $(h, k)_\alpha^S$. Определим операцию сложения для углов $(h, k)_\alpha^S$ и $(l, m)_\beta^T$. Для этого определим полуплоскость γ в плоскости первого угла. Если h не совпадает с k, то это полуплоскость, содержащая продолжение h. Если же k совпадает с h, то это полуплоскость α.

Подвергнем $(l, m)_\beta^T$ движению H, при котором луч l совмещается с k, а полуплоскость β с полуплоскостью γ. Нетрудно видеть, что совокупность лучей, составленная из $(h, k)_\alpha^S$ и $H(l, m)_\beta^T$, есть угол в смысле данного определения. По определению он называется суммой углов $(h, k)_\alpha^S$ и $(l, m)_\beta^T$.

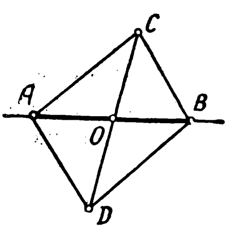
Разность углов $(h, k)_\alpha^S$ и $(l, m)_\beta^T$ определяется аналогично. Вместо плоскости γ берем ее дополнение и считаем, что разность углов $(h, k)_\alpha^S - (l, m)_\beta^T$, как совокупность лучей, состоит из лучей $(h, k)_\alpha^S$, если удалить из нее лучи $H(l, m)_\beta^T$ с учетом их кратности.

Сложение и вычитание углов обладает обычными свойствами, как и для отрезков.

§ 7. Некоторые соотношения между сторонами и углами треугольника

Мы будем говорить, что точка C прямой AB делит отрезок AB *пополам*, или что она является *срединой* отрезка AB, если $AC = CB$.

Теорема 27. *Каждый отрезок AB имеет средину O и притом только одну. Она расположена между A и B.*



Черт. 11.

Доказательство. Прямая AB разбивает проходящую через нее плоскость на две полуплоскости α' и α''. Отложим в полуплоскостях α' и α'' от полупрямых AB и BA соответственно равные углы и возьмем на сторонах этих углов точки C и D так, чтобы $AC = BD$ Отрезок CD пересекается с прямой AB в точке O (черт 11).

Из равенства треугольников ACB и BDA (теорема 23) следует $\angle CBA = \angle DAB$. Отсюда следует равенство треугольников CBD и DAC, из которого заключаем о равенстве углов ACD и BDC. Теперь по теореме 25 треугольники ACO и BDO равны и, следовательно, $AO = OB$, т. е. O — средина AB.

Точки A и B не могут располагаться по одну сторону от O, так как тогда $A \equiv B$ (теорема 16). Поэтому O лежит между A и B

Докажем единственность средины. Допустим, отрезок AB имеет две средины O_1 и O_2. Существует движение, которое оставляет на месте точку O_1 и переставляет полупрямые O_1A и O_1B Это движение переводит точку A в B, а B в A, так как $O_1A = O_1B$ (теорема 16). Точка O_2 при этом переходит в некоторую точку O_2'. Так как $AO_2 = AO_2' = BO_2$, то $O_2' \equiv O_2$, что невозможно, ибо O_2 и O_2' располагаются по разные стороны от O_1. Теорема доказана.

Теорема 28. *Пусть (h, k) — угол, образованный лучами h и k. Тогда существует и притом единственный луч l, расположенный между h и k, делящий угол (h, k) пополам, т. е. $(h, l) = (l, k)$.*

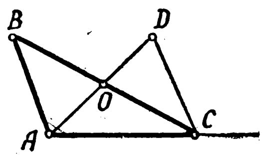
Доказательство. Отложим из вершины O угла (h, k) на его сторонах равные отрезки OA и OB. Пусть C — средина отрезка AB. Треугольники AOC и BOC равны (теорема 26). Отсюда равенство углов, образуемых лучом OC с лучами h и k.

Докажем единственность луча l. Пусть существует два таких луча l_1 и l_2. Они пересекают отрезок AB в точках C_1 и C_2. Из равенства треугольников AOC_1 и BOC_1, AOC_2 и BOC_2 следует, что каждая из этих точек является срединой AB. Но это противоречит предыдущей теореме. Теорема доказана.

Внешним углом треугольника ABC при вершине A называется угол, смежный с углом A.

Теорема 29. *Внешний угол треугольника больше любого внутреннего, не смежного с ним.*

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник и O — средина стороны BC. Проведем из точки A через O полупрямую и отложим на ней из точки O отрезок, равный OA. Пусть D конец этого отрезка (черт. 12).



Черт. 12.

Точка D лежит в полуплоскости, определяемой прямой BC, содержащей продолжение полупрямой CA. С другой стороны, D лежит в полуплоскости, определяемой прямой AC, содержащей полупрямую CB. Отсюда следует по теореме 13, что полупрямая CD находится между полупрямой CB и продолжением полупрямой CA. А это значит, что угол BCD меньше внешнего угла треугольника ABC при вершине C.

Треугольники ABO и DOC равны (теорема 23), поэтому углы ABO и DCO, как соответствующие, равны. Следовательно, угол B треугольника меньше внешнего угла при вершине C. Так как B и C — произвольные две вершины треугольника, то этим теорема доказана полностью.

Как следствие из этой теоремы получается, что *в каждом треугольнике два угла острые, т. е. меньше прямого.*

Теорема 30. *Прямые, образующие с пересекающей их прямой равные односторонние углы, не пересекаются. В частности, две прямые, перпендикулярные третьей, не пересекаются.*

Эта теорема непосредственно вытекает из теоремы 29.

Теорема 31. *Через каждую точку X плоскости, содержащей прямую a, можно провести в этой плоскости прямую b, не пересекающую a.*

Для этого достаточно через точку X провести прямую c, перпендикулярную a, а затем через эту точку провести прямую b, перпендикулярную c.

Теорема 32. *В каждом треугольнике против большей стороны лежит больший угол. И наоборот, против большего угла лежит большая сторона.*

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник и $AB > AC$. Отложим на AB отрезок, равный AC. Пусть C' — конец этого отрезка. По теореме 24 углы $AC'C$ и ACC' равны. Но угол $AC'C$, как внешний для треугольника $BC'C$, больше угла ABC. Обратное утверждение доказывается от противного.

Теорема 33. *В треугольнике каждая сторона меньше суммы и больше разности двух других сторон.*

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник. Отложим на продолжении отрезка AB за точку B отрезок, равный BC. Получим точку C'. Так как угол $BC'C$ равен углу BCC', то он меньше угла ACC'. По теореме 33 отсюда следует, что отрезок AC меньше AC', а он равен сумме AB и BC.

Утверждение о разности сторон доказывается аналогичным рассуждением.

§ 8. Аксиома непрерывности

Четвертая группа аксиом у нас будет состоять из одной аксиомы — аксиомы Дедекинда.

Аксиома IV. *Если точки прямой разбиты на два непустых класса так, что в одном из двух направлений на* *прямой каждая точка первого класса предшествует каждой точке второго класса, то либо в первом классе существует точка, следующая за всеми остальными точками первого класса, либо во втором классе есть точка, предшествующая всем остальным точкам второго класса.*

Теорема 34. *Пусть дана бесконечная последовательность точек на прямой A, A_1, A_2,... удовлетворяющая условиям:*

1. *В одном из двух направлений*

$$A < A_1 < A_2 < \ldots$$

2. $$AA_1 = A_1A_2 = \ldots$$

Тогда какова бы ни была точка $B > A$, найдется такое n, что $B < A_n$.

Доказательство. Допустим, утверждение неверно и, следовательно, при любом n $A_n < B$. Разобьем все точки прямой на два класса следующим образом. Точку X отнесем второму классу, если при любом n $A_n < X$. Остальные точки отнесем первому классу.

Таким образом, в первый класс попадают все точки A_n и каждая точка X, предшествующая хотя бы одной точке A_n $(X < A_n)$. И следовательно, каждая точка первого класса предшествует каждой точке второго класса. Очевидно, каждый из классов не пуст: второй класс содержит точку B, а первый — все точки A_n.

Пусть C — точка, существование которой утверждается аксиомой IV. Точка C не совпадает ни с одной точкой A_n, так как в противном случае A_{n+1} была бы во втором классе. Следовательно, при любом n $A_n < C$.

Возьмем на прямой точку D такую, чтобы $D < C$ и $CD = AA_1$. D не совпадает ни с одной точкой A_n, ибо в противном случае $C = A_{n+1}$, что невозможно. Так как D принадлежит первому классу $(D < C)$ и не совпадает ни с одной точкой A_n, то существует точка A_n такая, что $D < A_n$. Тем более $D < A_{n+2}$. Так как, кроме того, $A_n < C$ и $A_{n+2} < C$, то отрезок A_nA_{n+2} принадлежит CD, что невозможно $(CD < A_nA_{n+2})$. Теорема доказана.

Отрезок AB по определению состоит из точек, лежащих между A и B. Когда говорят о замкнутом отрезке, то к числу его точек относят также его концы A, B.

Теорема 35. *Пусть дана бесконечная последовательность замкнутых отрезков A_nB_n на прямой, причем каждый следующий отрезок содержится в предыдущем.*

Пусть далее не существует отрезка, который был бы меньше любого из отрезков A_nB_n.

Тогда существует и притом единственная точка C, принадлежащая всем отрезкам A_nB_n.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что при любом n $A_n < B_n$. Так как при $m < n$ отрезок A_nB_n принадлежит A_mB_m и $A_n < B_n$, а $A_m < B_m$, то $A_n < B_m$ и $A_m < B_n$. Таким образом, при любых m и n $A_n < B_m$.

Разобьем множество точек прямой на два класса. Во второй класс отнесем все точки B_n, а также любую точку X, следующую хотя бы за одной точкой B_n ($B_n < X$). В первый класс отнесем остальные точки. Таким образом, первый класс состоит из точек X, предшествующих всем точкам B_n ($X < B_n$). И следовательно, каждая точка первого класса предшествует каждой точке второго класса. Очевидно, каждый из классов не пуст: точки, предшествующие A_1, принадлежат первому классу, а точки, следующие за B_1 — второму классу.

Пусть C — точка, существование которой утверждается аксиомой IV. Покажем, что она принадлежит всем отрезкам A_nB_n. Не существует точки B_n, предшествующей C, так как в противном случае для точек X отрезка B_nC $X < C$, а это точки второго класса.

Если точка C совпадает с A_n, то все точки A_{n+q} ($q > 0$) совпадают с A_n. В противном случае, так как $A_n < A_{n+q}$, точки отрезка A_nA_{n+q} принадлежали бы второму классу, вместе с тем каждая такая точка предшествует A_{n+q}, что невозможно. Отсюда следует, что если $A_n \equiv C$, то C принадлежит всем отрезкам A_pB_p при $p \geqslant n$, так как является их общим концом, а первым $n-1$ отрезкам принадлежит по причине включения отрезков, оговоренной в теореме.

Аналогично рассматривается случай, когда C совпадает с одной из точек B_n.

Пусть, наконец, точка C не совпадает ни с одной из точек A_n и B_n. Так как каждая точка A_n принадлежит первому классу, а каждая точка B_n второму классу, то $A_n < C < B_n$ при любом n. А это значит, что C принадлежит всем отрезкам A_nB_n.

Докажем единственность точки C. Допустим, существуют две точки C_1 и C_2, принадлежащие всем отрезкам A_nB_n. Тогда и отрезок C_1C_2 принадлежит каждому из отрезков A_nB_n. Пусть C — какая-нибудь точка отрезка C_1C_2. Отрезок CC_1 меньше C_1C_2, а следовательно, меньше любого отрезка A_nB_n, что противоречит условию теоремы.

Теорема доказана.

В других изложениях четвертая группа аксиом содержит две аксиомы. Утверждение одной из них совпадает с утверждением теоремы 34. Она была введена еще Архимедом и называется аксиомой Архимеда.

Вторая аксиома состоит в утверждении теоремы 35 без единственности точки C. Она называется аксиомой Кантора.

§ 9. Пересечение прямой с окружностью, двух окружностей

Пусть O — точка на плоскости α и r — данный отрезок. *Окружностью с центром O и радиусом r* называется совокупность всех точек X плоскости α, для которых $OX = r$. Те точки X, плоскости для которых $OX < r$, называются внутренними по отношению к окружности, а те точки, для которых $OX > r$,— внешними.

Теорема 36. *Пусть c — окружность с центром (O) и радиусом r. Тогда если прямая a проходит через внутреннюю точку P, то она пересекает окружность в двух и только двух точках.*

Доказательство. Рассматриваем два случая: 1) прямая a проходит через O, 2) прямая a не проходит через O. В первом случае утверждение теоремы очевидно, так как на каждой из полупрямых прямой a, определяемых точкой O, существует и притом единственная точка X такая, что $OX = r$ (теорема 16).

Рассмотрим второй случай. Проведем через O прямую, перпендикулярную a. Она пересечет a в некоторой точке A. Утверждаем, что A является внутренней точкой. Действительно, если она не совпадает с P (если она совпадает с P, то она внутренняя по условию), то треугольник OAP прямоугольный и, согласно теореме 32, $OA < OP < r$.

Точка A разбивает прямую a на две полупрямые a' и a''. Разобьем все точки прямой a на два класса. В первый класс отнесем все точки полупрямой a', а также все точки X полупрямой a'', для которых $OX < r$, во второй класс — все остальные точки прямой. Покажем, что это разбиение точек прямой на классы удовлетворяет условию аксиомы IV.

Первый класс не пуст, так как ему принадлежит полупрямая a'. На полупрямой a'' существует точка X такая, что $AX = r$. Эта точка принадлежит второму классу, так как из прямоугольного треугольника OAX следует $OX > AX = r$. Таким образом, каждый из классов не пуст.

Пусть X — точка первого класса, а Y — точка второго класса. Покажем, что $X < Y$. Утверждение очевидно, если X принадлежит полупрямой a'. Пусть X принадлежит полупрямой a''.

Предположим, что $Y < X$. Угол OYA острый, следовательно, угол OYX тупой. И так как угол OXA острый, то в треугольнике OXY $OY < OX < r$, т. е. Y принадлежит первому классу, что противоречит условию.

Пусть D — точка, производящая деление на классы согласно аксиоме IV_1. Покажем, что $OD = r$.

Допустим, $OD < r$. Отложим от точки D в направлении полупрямой a'' отрезок, равный $r - OD$. Пусть E — конец этого отрезка. По теореме 33 в применении к треугольнику ODE $OE < r$. Следовательно, E принадлежит первому классу, но это невозможно, так как $D < E$. Аналогично исключается предположение $OD > r$. Таким образом, $OD = r$. И точка D является пересечением окружности с полупрямой a''. Докажем единственность точки D.

Допустим, существует две точки пересечения полупрямой a'' с окружностью D_1 и D_2. Пусть D — средина отрезка D_1D_2. Из равенства треугольников OD_1D и OD_2D следует, что OD перпендикулярна a. Но это невозможно, так как, в силу теоремы 22, $A \equiv D$, а точки D_1 и D_2 расположены по одну сторону от точки A.

Аналогично доказывается существование и единственность точки пересечения полупрямой a' с окружностью. Теорема доказана.

Теорема 37. *Пусть даны две окружности c_1, c_2 с центрами O_1, O_2 и радиусами r_1, r_2* причем

$$r_1 \leqslant r_2, \quad r_2 - r_1 < O_1O_2 < r_1 + r_2.$$

Тогда эти окружности имеют две и только две точки пересечения.

Доказательство этой теоремы также в существенной части опирается на аксиому непрерывности. Мы его приводить не будем.

§ 10. Измерение отрезков и углов

Теорема 38. *Существует и притом единственная функция μ, определенная на всех отрезках, удовлетворяющая условиям:*

1. Для каждого отрезка AB $\mu(AB) > 0$.

2. Если отрезки AB и CD равны, то $\mu(AB) = \mu(CD)$.

3. Если точка C находится между точками A и B, то

$$\mu(AC) + \mu(CB) = \mu(AB).$$

4. Для некоторого отрезка A_0B_0 $\mu(A_0B_0) = 1$.

Число μ называется *длиной* отрезка, а отрезок A_0B_0 — *единицей измерения длины.*

Аналогичная теорема имеет место для углов.

Теорема 39. *Существует и притом единственная функция ϑ, определенная для всех углов, удовлетворяющая условиям:*

1. Для каждого угла (h, k) $\vartheta(h, k) > 0$.

2. Если углы (h, k) и (l, m) равны, то $\vartheta(h, k) = \vartheta(l, m)$.

3. Если луч l находится между h и k, то

$$\vartheta(h, l) + \vartheta(l, k) = \vartheta(h, k).$$

4. Для некоторого угла (h_0, k_0) $\theta(h_0, k_0) = 1$.

Число ϑ называется *мерой угла*, а угол (h_0, k_0) — *единицей измерения углов.*

Мы ограничимся доказательством теоремы 38, теорема 39 в значительной степени доказывается аналогично.

Доказательство теоремы 38. Построим последовательность отрезков $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots$, из коих каждый следующий в два раза меньше предыдущего, т. е.

$$\delta_n + \delta_n = \delta_{n-1},$$

а $\delta_0 = A_0B_0$. Отметим на прямой AB то направление, в котором $A < B$, и построим последовательность точек $A_1, A_2, A_3, \ldots$ такую, чтобы $A < A_1 < A_2 \ldots$ и $A_{i-1}A_i \doteq \delta_n$. Пусть A_m — первая точка этой последовательности, которая не принадлежит AB. Такая точка существует по теореме 34. Очевидно, если $m > 1$, то A_{m-1} принадлежит отрезку AB. Обозначим

$$a_n = \frac{m-1}{2^n}, \quad b_n = \frac{m}{2^n}.$$

Из способа построения точки A_m следует, что при $n \to \infty$ последовательность a_n не убывает, а b_n не возрастает. Так как, кроме того, $b_n - a_n \to 0$, то эти последовательности имеют общий предел $\mu(AB)$.

Легко видеть, что построенная нами функция μ обладает следующими свойствами:

а) Если $a = a'$, то $\mu(a) = \mu(a')$.

б) $\mu(m\delta_n) = m/2^n$.

б) Если $a < a'$, то $\mu(a) < \mu(a')$.

Первое свойство очевидно, так как определяющие μ последовательности a_n и b_n для отрезков a и a' совпадают. Для доказательства свойства б) достаточно заметить, что все b_k отрезка $m\delta_n$ по крайней мере при $k \geqslant n$ имеют одно и то же значение $m/2^n$. Наконец, свойство в) следует из того, что последовательности b_n для отрезков a и a', очевидно, удовлетворяют условию $b_n \leqslant b'_n$.

Докажем теперь свойства 1—4, указанные в теореме.

Из них второе и четвертое доказаны. Таким образом, остается проверить первое и третье. Начнем с первого.

По теореме 34 существует такое n, что $n(AB) > A_0B_0$. Возьмем число p такое, чтобы $n < 2^p$. Тогда, так как $n(AB) > 2^p\delta_p > n\delta_p$, $AB > \delta_p$. И следовательно, $\mu(AB) > > {}^1/_{2^p} > 0$.

Докажем третье свойство. Это свойство достаточно очевидно, если каждый из отрезков AC, CB, а значит, и AB составлен из некоторого числа отрезков δ_n.

Заметим теперь, что каков бы ни был отрезок d при достаточно большом n можно указать такое число m, что отрезок $d'_n = m\delta_n$ будет не больше d, а отрезок $d''_n = (m+1)\delta_n$ не меньше d. Существование такого m устанавливается построением, которое приведено в начале доказательства. Так как $\mu(d'_n) \leqslant \mu(d) \leqslant \mu(d''_n)$, а $\mu(d''_n) - \mu(d'_n) = \frac{1}{2^n}$, то при $n \to \infty$ $\mu(d'_n) \to \mu(d)$ и $\mu(d''_n) \to \to \mu(d)$.

Построим теперь для отрезков AC и CB последовательности отрезков d'_n и d''_n и будем их обозначать соответственно a'_n и a''_n b'_n и b''_n.

Так как $a'_n + b'_n \leqslant AB \leqslant a''_n + b''_n$,
то
$$\mu(a'_n + b'_n) \leqslant \mu(AB) \leqslant \mu(a''_n + b''_n).$$
Но по доказанному
$$\mu(a'_n + b'_n) = \mu(a'_n) + \mu(b'_n), \quad \mu(a''_n + b''_n) = \mu(a''_n) + \mu(b''_n).$$
Отсюда
$$\mu(a'_n) + \mu(b'_n) \leqslant \mu(AB) \leqslant \mu(a''_n) + \mu(b''_n).$$
И переходя к пределу, получаем
$$\mu(AB) = \mu(AC) + \mu(CB).$$

Таким образом, функция μ действительно обладает свойствами 1—4.

Докажем единственность функции μ. Пусть имеем две функции μ_1 и μ_2, обладающие свойствами 1—4. Так как $\mu_i(\delta_0) = 1$, то из свойства 3) следует, что $\mu_i(\delta_n) = \frac{1}{2^n}$. Далее из свойств 1) и 3) следует монотонность функций μ_i, т. е. $\mu_i(a) > \mu_i(b)$, если $a > b$.

Построим для данного отрезка a отрезки a'_n и a''_n составленные из δ_n. Тогда
$$\mu_1(a'_n) \leqslant \mu_1(a) \leqslant \mu_1(a''_n), \quad \mu_2(a'_n) \leqslant \mu_2(a) \leqslant \mu_2(a''_n).$$
Так как $a''_n = a'_n + \delta_n$, то $\mu_i(a''_n) - \mu_i(a'_n) = \frac{1}{2^n}$. Отсюда следует, что $|\mu_1(a) - \mu_2(a)| < \frac{1}{2^n}$ при любом n. А это значит $\mu_1(a) = \mu_2(a)$. Единственность функции μ установлена. И теорема доказана полностью.

Теорема 39. *Каково бы ни было положительное число α, существует отрезок a такой, что $\mu(a) = \alpha$.*

Действительно, построим две последовательности положительных чисел α'_n и α''_n вида $m/2^k$, сходящиеся к α так, чтобы первая была неубывающей, а вторая невозрастающей. Очевидно, существуют отрезки a'_n и a''_n такие, что $\mu(a'_n) = \alpha'_n$, $\mu(a''_n) = \alpha''_n$.

Отложим отрезки a'_n и a''_n на прямой g из некоторой точки A в одном направлении. Пусть A'_n и A''_n — концы этих отрезков. По теореме 35 все отрезки $A'_nA''_n$ имеют общую точку B.

Очевидно, $\mu(AB) = \alpha$.

§ 11. Аксиома параллельности. Подобие фигур

Пятая группа аксиом состоит из одной аксиомы — аксиомы параллельности.

Аксиома V. *Через данную точку вне данной прямой можно провести на плоскости не более одной прямой, не пересекающей данную.*

Эта прямая называется *параллельной.*

Аксиомой V завершается система аксиом эвклидовой геометрии. В следующей главе будет показано, что эту систему аксиом нельзя пополнить новыми аксиомами так, чтобы они не вытекали из аксиом I—V и не противоречили им.

С помощью аксиомы параллельности могут быть получены новые факты геометрии Эвклида. Приведем некоторые из них.

Теорема 40. *Каждая прямая в пересечении с двумя параллельными образует равные соответственные углы.*

Доказательство. Пусть a и b — две параллельные прямые, c — прямая, их пересекающая, и A, B — точки пересечения. По теореме 30 через точку B проходит прямая b', не пересекающая a, так, что соответственные углы пересечения прямых a и b' с прямой c равны. А по аксиоме V прямая b' совпадает с b. Теорема доказана.

Теорема 41. *В каждом треугольнике сумма углов равна двум прямым.*

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник. Проведем через C прямую, параллельную AB. Две полупрямые, на которые разбивает эту прямую точка C, и полупрямые CA и CB образуют три угла. Один из них — угол C треугольника, а два другие в силу теоремы 40 равны углам треугольника A и B. Отсюда следует, что сумма углов треугольника ABC равна двум прямым.

Четырехугольник называется *параллелограммом*, если его противоположные стороны параллельны.

Теорема 42. *В каждом параллелограмме противоположные углы равны, сумма смежных равна двум прямым, противоположные стороны равны.*

Доказательство. Первые два утверждения непосредственно вытекают из теоремы 40 и свойств смежных и вертикальных углов. Третье утверждение следует из равенства треугольников, на которые параллелограмм разбивается его диагональю.

Теорема 43. *Пусть a, b, c — три попарно пересекающиеся прямые. Установим соответствие точек прямых a и b путем проектирования прямыми параллельными c. Тогда соответствующие отрезки прямых a, b пропорциональны.*

Доказательство. Из аксиомы V следует, что каждая прямая, параллельная c, пересекает a и b, так что указанное соответствие точек действительно возможно. Легко видеть, что равным отрезкам прямой a соответствуют равные отрезки прямой b.

Сопоставим каждому отрезку δ_a прямой a число $\nu(\delta_a)$, равное длине $\mu(\delta_b)$ соответствующего ему отрезка прямой b. Функция отрезка ν удовлетворяет условиям 1—3 теоремы 38 и, следовательно, отличается от длины только некоторым множителем. Таким образом,

$$\mu(\delta_a) = k\mu(\delta_b).$$

Теорема доказана.

Теорема 44. *Два треугольника с двумя соответственно равными углами подобны.*

Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — данные треугольники, причем $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. По теореме 41 $\angle C = \angle C_1$. Подвергнем треугольник $A_1B_1C_1$ движению, при котором его вершина C_1 совмещается с C, а вершины A_1 и B_1 переходят в точки A_2 и B_2 полупрямых CA и CB соответственно.

Так как треугольники $A_1B_1C_1$ и A_2B_2C равны, то угол A_2 треугольника A_2B_2C равен углу A треугольника ABC. И следовательно, прямые A_2B_2 и AB параллельны. Отсюда следует по теореме 43 пропорциональность отрезков

$$\frac{CA_2}{CA} = \frac{CB_2}{CB}.$$

(Для краткости записи длины отрезков обозначены самими отрезками).

Так как $CA_2 = C_1A_1$, $CB_2 = C_1B_1$, то

$$\frac{C_1A_1}{CA} = \frac{C_1B_1}{CB}.$$

Аналогично получается

$$\frac{C_1B_1}{CB} = \frac{A_1B_1}{AB}.$$

Теорема доказана.

Доказательства двух других признаков подобия треугольников, известные из школьного курса, не вызывают возражений. Мы их приводить не будем.

В заключение заметим, что с помощью теоремы 44 может быть доказана теорема Пифагора.

Теорема 45. *Сумма квадратов длин катетов прямоугольного треугольника равна квадрату длины гипотенузы.*

Доказательство. Пусть ABC — прямоугольный треугольник и C — прямой угол. Опустим перпендикуляр CD из прямого угла на гипотенузу. Основание перпендикуляра D находится между A и B. Действительно, допустив, что A и B находятся по одну сторону от D, вступаем в противоречие с теоремой 29.

Из подобия треугольников ABC, ACD и BCD следуют пропорции

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}, \quad \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}.$$

Отсюда

$$AC^2 = AB \cdot AD, \quad BC^2 = BD \cdot AB.$$

Складывая эти равенства почленно, получим

$$AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

Теорема доказана.

На этом мы и ограничимся в изложении фактического материала элементарной геометрии. Получение дальнейших теорем не составляет труда. Известные читателю доказательства этих теорем из школьного курса уже достаточно безупречны, и поэтому повторение их представляется нецелесообразным.

ГЛАВА III

ИССЛЕДОВАНИЕ АКСИОМ ЭВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Декартова реализация системы аксиом эвклидовой геометрии

В связи с аксиоматическим построением эвклидовой геометрии естественно возникают следующие три вопроса.

1. *Не противоречива ли принятая нами система аксиом, т. е. не могут ли из нее быть выведены путем логических рассуждений два взаимно исключающих следствия?*

2 *Полна ли система аксиом, т. е. нельзя ли ее пополнить новыми аксиомами, которые не противоречили бы уже принятым и не вытекали бы из них?*

3 *Независимы ли принятые аксиомы, т. е. не следуют ли некоторые аксиомы из других?*

Решение этих вопросов, которое будет дано в настоящей главе, тесно связано с построением конкретных реализаций системы аксиом. *Реализация* состоит в указании вещей трех родов произвольной природы, условно именуемых «точками», «прямыми», «плоскостями», и трех отношений между ними, условно выражаемых словами «принадлежать», «предшествовать», «движение», для которых в силу их конкретного содержания выполняются аксиомы.

Дело в том, что в отличие от изложения «Начал», где, как мы знаем, содержатся описания основных объектов — точек, прямых и плоскостей, в нашем изложении ничего не сказано о них, кроме того, что выражено аксиомами. Поэтому все наши выводы относятся к вещам произвольной природы, лишь бы для них и отношений между ними, которые также могут быть далеки от наглядных представлений, выполнялись аксиомы.

В связи с этим эвклидова геометрия допускает бесчисленное множество реализаций. Действительно, пусть S — любое, одно-однозначное отображение множества E всех точек какой-либо реализации на себя или на другое множество, обозначим его R. Будем называть точками элементы множества R. Прямыми (плоскостями) будем называть подмножества R, составленные из образов прямых (плоскостей). Отношения принадлежности, порядка и движение определим через соответствующие отношения прообразов в E. Легко видеть, что для элементов R, как точек, и отмеченных подмножеств прямых и плоскостей выполняются все аксиомы.

Сейчас мы укажем одну из реализаций системы аксиом эвклидовой геометрии. Она называется *декартовой*. Для простоты изложения мы будем строить реализацию плоской системы аксиом. Однако, как нетрудно убедиться, такое же построение возможно и для пространственной системы.

Точкой мы будем называть любую пару вещественных чисел x и y, взятых в определенном порядке (x, y), а эти числа — координатами точки. Прямой будем называть совокупность всех точек, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению

$$ax + by + c = 0.$$

Это уравнение будем называть уравнением прямой, прямые $x = 0$ и $y = 0$ — осями координат, а точку $(0, 0)$ — началом координат.

Мы будем говорить, что точка принадлежит прямой, если она является одной из ее точек. Таким образом, точка принадлежит прямой, если ее координаты удовлетворяют уравнению прямой.

Отношение порядка для точек на прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, мы определяем следующим образом. Если $b \neq 0$, то $A_1(x_1, y_1) < A_2(x_2, y_2)$ в одном направлении определяется условием $x_1 < x_2$, а в противоположном — $x_2 < x_1$. Если $b = 0$, то $A_1 < A_2$ в одном направлении определяется условием $y_1 < y_2$, а в противоположном — $y_2 < y_1$.

Движение будет заключаться в сопоставлении каждой точке (x, y) точки (x', y') согласно следующих формул:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\vartheta - \varepsilon y\sin\vartheta + a, \\ y' &= x\sin\vartheta + \varepsilon y\cos\vartheta + b, \end{aligned} \qquad (*)$$

где ϑ, a, b — любые числа, а $\varepsilon = \pm 1$. Движение для прямой определяется через движение принадлежащих ей точек. В силу линейности и однозначной разрешимости формул (*) оно действительно указанным образом каждой прямой сопоставляет прямую.

При таком конкретном понимании точек и прямых и отношений между ними каждая из аксиом эвклидовой геометрии представляет собой некоторое утверждение, относящееся к вещественным числам. Сейчас мы покажем, что каждое из этих утверждений действительно имеет место в силу соответствующих теорем арифметики.

§ 2. Выполнимость аксиом эвклидовой геометрии в декартовой реализации

Аксиома I_1. Каковы бы ни были точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), существует прямая, через них проходящая.

Действительно, прямая

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)\cdot(x_2 - x_1) = 0$$

проходит через каждую из точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Аксиома I_2. Каковы бы ни были две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), существует не более одной прямой, которая проходила бы через эти точки.

Допустим противное. Пусть через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) проходят две прямые

$$ax + by + c = 0, \qquad a_1x + b_1y + c_1 = 0.$$

Так как система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет более одного решения, то уравнения зависимы, т. е. отличаются только множителем. А это значит — прямые совпадают.

Аксиома I_3. На каждой прямой $ax + by + c = 0$ лежат по крайней мере две точки. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

Действительно, точка $\left(\frac{-ac}{a^2 + b^2} - \lambda b,\ \frac{-bc}{a^2 + b^2} + \lambda a\right)$ при любом λ принадлежит прямой. А три точки (0, 0), (0, 1), (1, 0) не лежат ни на какой прямой.

Аксиомами I_1, I_2 и I_3 исчерпываются все плоские аксиомы связи. Перейдем к аксиомам порядка.

Аксиомы порядка II_1, II_2, II_3 тривиальным образом выполняются в силу соответствующих свойств неравенств для вещественных чисел.

Аксиома II_4. В одном из двух направлений на прямой $ax + by + c = 0$ для каждой точки $A(x, y)$ найдутся точки A_1 и A_2 такие, что $A_1 < A < A_2$.

Действительно, если точка $A(x, y)$ лежит на прямой $ax + by + c = 0$, то на ней лежат также точки $(x + b, y - a)$, $(x - b, y + a)$. Легко видеть, что в любом из двух направлений одна из них предшествует A, а другая следует за ней.

Аксиома II_5. Прямая g: $ax + by + c = 0$ разбивает плоскость на две полуплоскости так, что если $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ — две точки одной полуплоскости, то отрезок A_1A_2 не пересекается с прямой g, если же A_1 и A_2 принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок A_1A_2 пересекается с прямой g.

Подвергнем плоскость разбиению на две области

$$ax + by + c < 0 \quad \text{и} \quad ax + by + c > 0.$$

Покажем, что это разбиение обладает указанными в аксиоме свойствами.

Действительно, пусть $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ — прямая, соединяющая точки A_1 и A_2. И пусть для определенности $\beta \neq 0$. Тогда для всех точек отрезка A_1A_2 $x_1 < x < x_2$ или $x_2 < x < x_1$.

Подставим координаты x и $y = -\frac{1}{\beta}(\alpha x + \gamma)$ точки отрезка A_1A_2 в $ax + by + c$. Тогда получим линейную функцию от x $f(x)$. Если точки A_1 и A_2 принадлежат одной области, то $f(x_1)$ и $f(x_2)$ одного знака, следовательно, $f(x)$ сохраняет знак во всем интервале (x_1, x_2) А это значит, что отрезок A_1A_2 не пересекает прямую $ax + by + c = 0$. Если же точки A_1 и A_2 принадлежат разным областям, то $f(x_1)$ и $f(x_2)$ разных знаков, и, следовательно, $f(x)$ обращается в нуль в интервале (x_1, x_2) Это значит, что отрезок A_1A_2 пересекает прямую $ax + by + c = 0$. Аналогично рассматривается случай $\beta = 0$ (в этом случае $\alpha \neq 0$).

Аксиома III_1. Каждое движение сохраняет отношение принадлежности.

Очевидно.

Аксиома III_2. Каждое движение сохраняет отношение порядка.

Пусть движение переводит прямую $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ в прямую $ax+by+c=0$. И пусть для определенности $\beta\neq 0$ и $b\neq 0$. Выразим координату x' точки прямой $ax+by+c=0$ через координату x соответствующей точки прямой $\alpha x+\beta y+\gamma=0$. Для этого в первую формулу (*) подставим $y=-\frac{1}{\beta}(\alpha x+\gamma)\div x'(x)$ есть линейная, а следовательно, монотонная функция (она не сводится к постоянной, так как из уравнения $ax+by+c=0$ следовало бы, что и y — постоянная). Отсюда выполнимость аксиомы III_2. Другие случаи: $\beta=0$, $b\neq 0$; $\beta=0$, $b=0$; $\beta\neq 0$, $b=0$. Рассматриваются аналогично.

Аксиома III_3. Движения образуют группу.

Действительно, тождественное преобразование $x'=x$, $y'=y$ содержится среди преобразований

$$x'=x\cos\vartheta-\varepsilon y\sin\vartheta+a,\quad y'=x\sin\vartheta+\varepsilon y\cos\vartheta+b \qquad (*)$$

при $\vartheta=0$, $a=0$, $b=0$, $\varepsilon=1$. Преобразование обратное (*) задается формулами
$x=x'\cos\vartheta+y'\sin\vartheta+a'=x'\cos(-\varepsilon\vartheta)-\varepsilon y'\sin(-\varepsilon\vartheta)+a'$, $y=-\varepsilon x'\sin\vartheta+\varepsilon y'\cos\vartheta+b'=x'\sin(-\varepsilon\vartheta)+\varepsilon y'\cos(-\varepsilon\vartheta)+$ $+b'$ и, следовательно, является движением. Последовательное выполнение двух преобразований вида (*) также есть преобразование вида (*).

Аксиома III_7. Пусть a_1 и a_2 — две прямые, A_1 и A_2 — точки на этих прямых. Тогда существует и притом единственное движение, которое переводит точку A_1 в A_2, заданную полупрямую прямой a_1 в заданную полупрямую прямой a_2, заданную полуплоскость, определяемую прямой a_1, в заданную полуплоскость, определяемую прямой a_2.

Аксиома III_3 позволяет в доказательстве существования ограничиться случаем, когда A_2 — начало координат, a_2 — ось x-ов, полупрямая на ней — $x>0$ и полуплоскость — $y>0$. Не ограничивая общности, можно считать, что прямая a_1 задается уравнением $x\sin\vartheta+$ $+y\cos\vartheta+p=0$. К такому виду уравнение легко приводится.

Рассмотрим движение

$$\pm x' = x\cos\theta - y\sin\vartheta + q, \qquad \pm y' = x\sin\theta + y\cos\vartheta + p.$$

Очевидно, оно прямую a_1 переводит в ось x-ов ($y = 0$). Выбором q можно добиться того, что точка A_1 будет переходить в начало координат. А выбором знаков при x' и y' можно удовлетворить остальным условиям.

В силу аксиомы III_3 единственность достаточно показать в случае, когда обе точки A_i совпадают с началом координат, полупрямые a_i — с положительной полуосью x, а полуплоскости — с полуплоскостью $y > 0$.

Обратимся к формулам (*). Так как (0, 0) переходит в (0, 0), то $a = b = 0$. Так как при $y = 0$, $y' = 0$, то $\vartheta = 0$. Так как при $y > 0$, $y > 0$, то $\varepsilon = 1$. Следовательно, движение — $x' = x$, $y' = y$. Единственность доказана.

Аксиома III_4. Если при движении полупрямая h, как целое, и ее начальная точка A остаются неподвижными, то все точки полупрямой h остаются неподвижными.

После аксиом III_3 и III_7 достаточно рассмотреть случай, когда точка A совпадает с началом координат, а полупрямая h — с положительной полуосью x. Обратимся к формулам (*). Так как при $y = 0$ должно быть $y' = 0$, то $\vartheta = 0$. Далее, так как при $x = y = 0$ $x' = y' = 0$, то $a = b = 0$. Таким образом, формулы (*) имеют вид $x' = x$, $y' = \varepsilon y$. И аксиома выполняется.

Аксиома III_5. Для каждой пары точек (x_1, y_1), (x_2, y_2) существует движение, переставляющее их местами.

Если точки лежат на оси x, то требуемое движение $x' = -x + x_1 + x_2$, $y' = y$. Общий случай сводится к этому частному с помощью аксиом III_3 и III_7.

Аксиома III_6. Для каждой пары лучей, исходящих из одной точки, существует движение, их переставляющее.

В частном случае, когда лучи задаются уравнениями $x\cos\vartheta + y\sin\vartheta = 0$, $x\cos\vartheta - y\sin\vartheta = 0$, требуемое движение либо $x' = x$, $y' = -y$, либо $x' = -x$, $y' = y$. Общий случай сводится к частному путем перехода сначала к лучам $y = 0$, $x\cos 2\vartheta + y\sin 2\vartheta = 0$ некоторым движением (аксиома III_7), а затем движением $x' = x\cos\vartheta - y\sin\vartheta$, $y' = x\sin\vartheta + y\cos\vartheta$ к лучам $x\cos\vartheta + y\sin\vartheta = 0$, $x\cos\vartheta - y\sin\vartheta$.

Аксиома непрерывности выполняется в силу аксиомы Дедекинда для вещественных чисел.

Аксиома V. Через данную точку (x_0, y_0) вне данной прямой $ax + by + c = 0$ можно провести к ней не более одной параллельной.

Допустим, существуют две такие прямые $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Обе системы

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{aligned}\right\}$$

несовместимы. Поэтому

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a & b \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{Отсюда} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

И так как система

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \qquad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

имеет решение $(x = x_0,\ y = y_0)$, то ее уравнения зависимы, а следовательно, прямые совпадают.

Выполнимость всех аксиом доказана.

§ 3. Непротиворечивость и полнота системы аксиом эвклидовой геометрии

Система аксиом любой теории T, в частности эвклидовой геометрии, непротиворечива, если она допускает хотя бы одну реализацию R.

Действительно, если бы в T можно было из системы аксиом вывести два взаимно исключающих следствия, то это было бы и в R. А так как справедливость каждого утверждения в R, соответствующего аксиоме T, не вызывает сомнений в силу природы вещей R и отношений между ними, то получение таких двух следствий в R невозможно. Отсюда невозможность прийти к противоречию в T.

В первых двух параграфах мы построили реализацию системы аксиом эвклидовой геометрии — декартову реализацию. Построение заключалось в том, что мы указали систему объектов, условно назвав их точками и прямыми, и систему отношений между ними, для которых выполняются все утверждения, содержащиеся в аксиомах эвклидовой геометрии. Вывод, что эти утверждения действительно верны, мы сделали на основании соответствующих теорем, относящихся к теории вещественных чисел. А так как эти теоремы в конечном счете выводятся из аксиом арифметики, то мы можем гарантировать построение декартовой реализации только при условии непротиворечивости системы аксиом арифметики. Таким образом, мы получаем решение вопроса о непротиворечивости системы аксиом эвклидовой геометрии в следующей форме.

Теорема 46. *Система аксиом геометрии Эвклида непротиворечива, если непротиворечива система аксиом арифметики.*

Перейдем к вопросу о полноте системы аксиом. Пусть мы имеем две реализации R' и R'' системы аксиом некоторой теории T. Эти реализации называются *изоморфными*, если между элементами этих реализаций можно установить одно-однозначное соответствие, сохраняющее отношения, определяемые аксиомами.

Система аксиом T называется *полной*, если ее нельзя пополнить новыми аксиомами, не вытекающими из аксиом T и не противоречащими им. Конечно, при этом предполагается, что новые аксиомы не вводят новых отношений. Вопрос о полноте системы аксиом тесно связан с вопросом об изоморфизме всех ее реализаций. Именно, *если все реализации системы аксиом T изоморфны, то эта система аксиом полная.*

Действительно, пусть система аксиом T неполная. Это значит, что существует некоторое утверждение a, которое не может быть выведено из аксиом T и не находится с ними в противоречии. При этом мы можем образовать две непротиворечивые системы аксиом T' и T'', присоединяя к аксиомам T аксиому a или ее отрицание $\bar{a}$.

Пусть R' и R'' — реализации этих систем аксиом T' и T''. Каждая из них является вместе с тем реализацией T. Так как в T' имеет место a, а в T'' — $\bar{a}$ (отрицание a), то эти реализации T не изоморфны. Утверждение доказано.

Теорема 47. *Система аксиом эвклидовой геометрии полна. То есть нельзя присоединить к ней никаких новых аксиом, относящихся к точкам, прямым и плоскостям и отношениям между ними, определяемым аксиомами первых трех групп так, чтобы они не вытекали из аксиом I—V и не противоречили им.*

Для доказательства этой теоремы достаточно установить изоморфизм всех реализаций системы аксиом эвклидовой геометрии. Так как две реализации, изоморфные третьей, очевидно, изоморфны, то достаточно доказать изоморфизм всех реализаций декартовой реализации.

Введем на плоскости произвольной реализации прямоугольные декартовы координаты x, y, как это делается в аналитической геометрии. Известно, что каждая прямая задается линейным уравнением вида $ax + by + c = 0$ и каждое такое уравнение соответствует некоторой прямой. Так между точками и прямыми произвольной реализации плоской системы аксиом эвклидовой геометрии и точками и прямыми декартовой реализации устанавливается взаимно однозначное соответствие. Это соответствие есть изоморфизм.

Действительно, указанное соответствие сохраняет отношение принадлежности. Далее, как показывается в аналитической геометрии, следование точек на прямой выражается через координаты точек в точности так, как это было принято нами при построении декартовой реализации. Наконец, движения аналитически задаются формулами

$$x' = x\cos\vartheta - \varepsilon y\sin\vartheta + a,$$
$$y' = x\sin\vartheta + \varepsilon y\cos\vartheta + b,$$

т. е. так, как это было определено в декартовой реализации.

Таким образом, каждая реализация системы аксиом эвклидовой геометрии изоморфна декартовой реализации. И следовательно, эта система аксиом полна. Теорема доказана.

§ 4. Независимость аксиомы непрерывности

Аксиома a какой-либо теории T с аксиоматическим построением называется *независимой*, если она не может быть получена как следствие остальных аксиом T. Обычный прием доказательства независимости той или иной аксиомы a заключается в том, что строят реализацию R системы аксиом T без аксиомы a, в которой аксиома a не выполняется. Если такую реализацию удается построить, то аксиома a независима.

Действительно, если бы a получалась как следствие остальных аксиом, то в R также было бы справедливо утверждение a, но это противоречит построению R.

Именно таким путем мы докажем независимость аксиомы непрерывности в эвклидовой геометрии.

Теорема 48. *Аксиома непрерывности независима. То есть она не может быть получена как следствие остальных аксиом эвклидовой геометрии.*

Доказательство. Обозначим G совокупность вещественных чисел, содержащую все рациональные числа, а также все числа, которые получаются из рациональных путем применения в конечном числе операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня. Очевидно, сумма, разность, произведение, частное двух чисел из G, а также корень квадратный из любого числа, принадлежащего G, снова есть число G. Известно, что числами из G не исчерпываются все вещественные числа. И даже более того, множество чисел G не более чем счетно.

Попробуем построить декартову реализацию системы аксиом эвклидовой геометрии по тому же способу, как и в § 1, но пользоваться будем не всеми вещественными числами, а только числами из G.

Таким образом, точкой мы будем называть пару чисел (x, y) из G, прямой — совокупность точек, удовлетворяющих любому линейному уравнению $ax + by + c = 0$ с коэффициентами из G. Отношение порядка для точек на прямой определим, как и прежде. А движения зададим формулами

$$x' = mx - ny + a, \quad y' = nx + my + b,$$

коэффициенты которых принадлежат G и, кроме того, удовлетворяют условию: $m^2 + n^2 = 1$. Эти формулы ничем не отличаются от тех, которыми мы пользовались раньше, так как всегда можно положить $m = \cos\vartheta$, $n = \pm\sin\vartheta$.

Определив точки, прямые и основные отношения между ними, мы можем приступить к проверке выполнимости аксиом. При этом все рассуждения, приведенные нами в § 2, здесь могут быть повторены, с небольшими изменениями и пояснениями. Только аксиому непрерывности нам доказать не удается, так как она вообще не выполняется.

Действительно, пусть α — число, не содержащееся в G. Как указано выше, такие числа существуют. Разобьем множество точек прямой $y = 0$ на два класса, относя в первый класс те точки $(x, 0)$, у которых $x < \alpha$, а во второй все точки, у которых $x > \alpha$. Очевидно, каждая точка принадлежит одному из классов (точки $(\alpha, 0)$ нет на прямой) и каждый из классов не пуст.

Каждая точка первого класса в смысле принятого определения отношения следования предшествует каждой точке второго класса. По аксиоме непрерывности, если она имеет место, должна быть точка $(\beta, 0)$, производящая разбиение на классы. Число β обладает свойствами: $x \leqslant \beta$, если $(x, 0)$ первого класса, и $\beta \leqslant x$, если $(x, 0)$ второго класса. Но по определению классов таким свойством обладает только число $\beta = \alpha$. А $(\alpha, 0)$ не является точкой прямой. И следовательно, аксиома непрерывности не выполняется.

Что касается остальных аксиом, то почти дословным повторением доказательств § 2 можно убедиться в их выполнимости.

Таким образом, мы построили реализацию системы всех аксиом эвклидовой геометрии, кроме аксиомы непрерывности, которая в этой реализации не имеет места. Это и доказывает независимость аксиомы непрерывности от остальных аксиом эвклидовой геометрии.

Доказанная теорема позволяет привести содержательный пример неполной системы аксиом. Именно, система аксиом эвклидовой геометрии без аксиомы непрерывности является неполной. Эта система может быть пополнена новой аксиомой (аксиомой непрерывности), не вытекающей из остальных аксиом и не противоречащей им.

§ 5. Независимость аксиомы параллельности

Теорема 49. *Аксиома параллельности эвклидовой геометрии независима. Она не может быть выведена из остальных аксиом.*

Согласно общему приему доказательства независимости аксиом, указанному в § 4, нам достаточно построить такую реализацию системы аксиом эвклидовой геометрии без аксиомы параллельности, в которой аксиома параллельности не выполняется. Сейчас мы построим такую реализацию, причем для простоты изложения ограничимся плоской системой аксиом.

Под точкой мы будем понимать любую точку эвклидовой плоскости внутри единичного круга

$$x^2 + y^2 < 1,$$

под прямой — любую хорду этого круга. Отношение принадлежности и порядка будем понимать в смысле эвклидовой геометрии. Наконец, движением будем называть любую коллинеацию, переводящую окружность $x^2 + y^2 = 1$ в себя.

В этой реализации, для краткости мы ее обозначим K, тривиальным образом выполняются аксиомы первых двух групп и аксиома непрерывности. Таким образом, нам остается проверить аксиомы движения и аксиому параллельности.

Начнем с аксиом движения.

Заметим, что эвклидовы вращения около центра круга $x^2 + y^2 < 1$, а также зеркальные отражения в его диаметрах суть движения в реализации K.

Далее, преобразование, задаваемое формулами

$$x' = \frac{x\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta y}, \quad y' = \frac{y+\beta}{1+\beta y}, \quad |\beta| < 1,$$

есть движение в K. Для проверки последнего составим $x'^2 + y'^2$. Легко убедиться, что при $x^2 + y^2 = 1$ $x'^2 + y'^2 = 1$. Это преобразование, мы будем обозначать его H_β, переводит точку $(0, 0)$ в точку $(0, \beta)$.

Аксиома III$_1$. Движения сохраняют отношение принадлежности.

Эта аксиома выполняется тривиальным образом.

Аксиома III$_2$. Движения сохраняют отношение порядка.

Действительно, пусть движение переводит хорду a в хорду b. Пусть для определенности обе хорды не параллельны оси y-ов. Выразим абсциссу x' точки b через абсциссу x соответствующей точки a. Так как коллинеации задаются дробнолинейными формулами, то x' будет дробнолинейной функцией от x

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

Эта функция, как легко видеть, монотонна и не сводится к постоянной, так как тогда y' было бы постоянно, что невозможно. Так как x' монотонная функция от x, то, очевидно, аксиома III_2 действительно выполняется. Аналогично рассматриваются случаи, когда одна или обе хорды параллельны оси y.

Аксиома III_3. Движения образуют группу.

Очевидно, так как все коллинеации образуют группу.

Аксиома III_7. Пусть a и b — две прямые, A и B — точки на этих прямых. Тогда существует и притом единственное движение, которое переводит заданную полуплоскость, определяемую прямой a, в заданную полуплоскость, определяемую прямой b, заданную полупрямую a в заданную полупрямую b и точку A в точку B.

С помощью эвклидовых вращений и движения H_β точки A и B совмещаются с центром круга. Затем требуемое движение составляется из вращения около центра круга и, может быть, зеркального отражения в диаметре. После чего точка B возвращается на старое место обратным движением. Таким образом, движение, о котором идет речь в аксиоме, действительно существует.

А теперь единственность его достаточно доказать для очень специального случая, именно, когда точки A и B совпадают с началом координат, полупрямые — с отрезком $0 < x < 1$ положительной полуоси x-ов, а полуплоскости — с полукругом $y > 0$.

Общая коллинеация задается формулами:

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}, \quad y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{ax + by + c}.$$

Так как при $y = 0$ должно быть $y' = 0$, то $a_2 = c_2 = 0$. Так как коллинеация сохраняет три точки прямой $y = 0$, именно $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(-1, 0)$, то она сохраняет все точки этой прямой, т. е. при $y = 0$ должно быть $x' = x$. Отсюда $c_1 = 0$, $a = 0$. Таким образом, формулы принимают вид

$$x' = \frac{x + \gamma y}{1 + \beta y}, \quad y' = \frac{\delta y}{1 + \beta y}.$$

Так как при $x^2 + y^2 = 1$ $\quad x'^2 + y'^2 = 1$, то

$$\left(\frac{x + \gamma y}{1 + \beta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{1 + \beta y}\right)^2 = 1$$

должно быть эквивалентно $x^2 + y^2 = 1$. Отсюда легко заключить, что $\beta = 0$, $\gamma = 0$, а $\delta = \pm 1$. Так как при $y > 0$ $y' > 0$, то $\delta = +1$. И единственность доказана.

Аксиома III$_4$. Если при движении полупрямая h, как целое, и ее начальная точка остаются неподвижными, то все точки полупрямой h остаются неподвижными.

Коллинеация, задающая указанное в аксиоме движение, оставляет неподвижными концы хорды. А так как три точки прямой неподвижны при коллинеации, то неподвижны все точки.

Аксиома III$_5$. Существует движение, которое переставляет две данные точки A и B.

Если обе точки на оси y и симметрично расположены относительно начала координат, то движение, о котором идет речь, есть зеркальное отражение относительно оси x. Чтобы общий случай свести к этому частному, достаточно уметь движением перевести точки A и B в указанное расположение. Это сделать нетрудно. Сначала точки A и B переводятся на ось y каким-нибудь движением, но так, чтобы ни одна из них не попала в начало координат. А потом применяем движение H_β, подобрав β надлежащим образом.

Аксиома III$_6$. Существует движение, которое переставляет лучи h и k, исходящие из одной точки.

Если лучи h и k исходят из центра круга, то это движение есть зеркальное отражение относительно биссектрисы образованного ими угла. Общий случай сводится к этому частному с помощью аксиомы III$_7$.

Итак, все аксиомы движения в реализации K действительно выполняются.

Осталось рассмотреть аксиому параллельности. Эта аксиома в реализации K не выполняется. Действительно, через точку вне хорды можно провести бесчисленное множество хорд, ее не пересекающих.

Построение реализации K и доказывает независимость аксиомы параллельности.

§ 6. О зависимости некоторых аксиом движения

В этом параграфе мы покажем, что принятую нами группу аксиом движения можно значительно сократить. Именно, можно ограничиться аксиомами III$_1$, III$_2$, III$_3$

и III_7. Остальные три аксиомы движения III_4, III_5 и III_6 являются следствием указанных четырех аксиом, аксиом порядка и аксиомы непрерывности. Приведем доказательство этого утверждения в случае плоской геометрии. Начнем с доказательства следующей леммы.

Лемма. *Пусть AB — замкнутый отрезок и f — отображение этого отрезка на себя, удовлетворяющее условиям:*

1. *Отображение f одно-однозначно, то есть различные точки переводит в различные;*

2. *Отображение f сохраняет отношение порядка, то есть если в одном из двух направлений $X < Y < Z$, то в одном из двух направлений $f(X) < f(Y) < f(Z)$.*

Тогда на отрезке AB существует неподвижная точка относительно отображения f, то есть такая точка X^*, для которой $f(X^*) = X^*$.

Доказательство. Выберем на прямой AB то направление, в котором $A < B$. Пусть для определенности в этом же направлении $f(A) < f(B)$ (нас будет интересовать именно этот случай). Если утверждение неверно, то во всяком случае $A < f(A)$ и $f(B) < B$.

Разобьем множество точек прямой AB на два класса. К первому классу мы отнесем прежде всего точку A и все точки, предшествующие A. Далее к первому классу отнесем всякую точку X отрезка AB, если для каждой точки X' отрезка AX $X' < f(X')$. Остальные точки отнесем ко второму классу. Очевидно, каждый из классов не пуст.

Покажем, что каждая точка X первого класса предшествует каждой точке Y второго класса. Действительно, если точка X принадлежит к первому классу, то всякая точка Y, предшествующая X, тоже принадлежит к первому классу. Отсюда следует, что каждая точка первого класса предшествует каждой точке второго класса. Таким образом, наше разбиение точек прямой AB на два класса удовлетворяет условиям аксиомы Дедекинда.

Согласно аксиоме Дедекинда, существует точка C, производящая деление на классы. Утверждаем, что $f(C) = C$. Допустим, утверждение неверно. Тогда либо $f(C) < C$, либо $C < f(C)$. Рассмотрим каждую из этих возможностей.

Так как отображение f сохраняет отношение порядка, то

$$f(A) < f(C) < f(B). \qquad (*)$$

Если $f(C) < C$, то на отрезке $(f(C), C)$ найдется точка X' такая, что

$$f(C) < X' < f(X').$$

Отсюда, принимая во внимание (*), получаем

$$f(A) < f(C) < f(X').$$

С другой стороны, по выбору точки X'

$$A < X' < C,$$

а это противоречит тому, что отображение f сохраняет отношение порядка.

Если $f(C) > C$, то на отрезке $(f(C), C)$ найдется точка X', для которой $f(X') < X'$. Иначе точка C не была бы точкой, производящей деление. Для точки X' будем иметь:

$$C < X' < B;$$
$$f(X') < f(C) < f(B).$$

И мы снова приходим к противоречию.

Лемма доказана.

Доказательство аксиомы III_4. Аксиомой III_4 утверждается, что если движение H сохраняет полупрямую a' прямой a, как целое, то оно оставляет неподвижными все точки прямой a.

Пусть α' и α'' — две полуплоскости, определяемые прямой a. Относительно движения H могут быть два предположения: либо $H\alpha' = \alpha'$, либо $H\alpha' = \alpha''$. В первом случае аксиома III_4 вытекает из аксиомы III_7. Действительно, тождественное отображение H^0 обладает свойствами движения H, а следовательно, по аксиоме III_7 $H = H^0$. Во втором случае рассмотрим движение H^2. Так как $H^2a' = a'$, $H^2\alpha' = \alpha'$, то по доказанному H^2 является тождественным. Допустим, вопреки утверждению аксиомы, что для некоторой точки X прямой a $HX \neq X$. Тогда в одном из двух направлений либо

$$O < HX < X,$$

либо

$$O < X < HX.$$

Оба случая рассматриваются аналогично. И поэтому мы ограничимся первым из них. Итак, пусть

$$O < HX < X. \qquad (**)$$

Подвергая точки O, HX и X движению H, получим либо

$$HO < H^2X < HX,$$

либо

$$HO > H^2X > HX.$$

Так как $HO = O$, $H^2X = X$, то в любом случае точка X получается между O и HX, а это противоречит (**).

Аксиома III_4 доказана.

Доказательство аксиомы III_5. Аксиомой III_5 утверждается существование движения, переставляющего любые две данные точки A и B.

Пусть c — прямая, соединяющая точки A, B и α' — одна из полуплоскостей, определяемых прямой c. Обозначим H движение, удовлетворяющее условиям:

$$HA = B, \quad HB < B, \quad H\alpha' = \alpha'.$$

Существование такого движения обеспечивается аксиомой III_7. Если $HB \neq A$, то либо $A < HB$, либо $HB < A$. Не ограничивая общности, можно считать, что $A < HB$. Рассмотрим теперь четыре точки на прямой c:

A, $HA = B$, $H^2A = HB$ и H^3A. Так как

$$A < H^2A < HA,$$

то либо

$$HA < H^3A < H^2A,$$

либо

$$HA > H^3A > H^2A.$$

Первая возможность исключается, так как влечет за собой $HA < H^2A$, и, следовательно, остается вторая. Но тогда рассматриваемые четыре точки на прямой c располагаются в следующем порядке:

$$A < H^2A < H^3A < HA.$$

Отрезок (A, HA) движением H^2 переводится в свою часть — отрезок (H^2A, H^3A). По лемме движение H^2 оставляет неподвижной некоторую точку X^* отрезка (A, HA). Эта точка принадлежит также отрезку (H^2A, H^3A), который является образом отрезка (A, HA) при движении H^2. Так как движение H^2 оставляет точку X^* неподвижной, а точки A и HA принадлежат одной полупрямой c', определяемой этой точкой, то оно переводит эту полупрямую в себя.

Итак, движение H^2 обладает следующими свойствами:

$$1)\ H^2a' = a',\ 2)\ H^2X^* = X^*,\quad 3)\ H^2c' = c'.$$

Отсюда по доказанной аксиоме III_4 заключаем, что H^2 является тождественным, и, следовательно, $H^2A = A$, что противоречит $A < H^2A$.

Аксиома III_5 доказана.

Доказательство аксиомы III_6 о существовании движения, переставляющего лучи, исходящие из одной точки, основано на тех же соображениях, что и доказательство аксиомы III_5. Поэтому мы его приводить не будем.

ГЛАВА IV

ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

§ 1. Некоторые предложения абсолютной геометрии

В предыдущей главе было доказано, что аксиома параллельности независима от остальных аксиом эвклидовой геометрии. Отсюда следует, что, заменив эту аксиому ее отрицанием, мы получим также логически непротиворечивую систему. Геометрия, основанная на этой системе аксиом, называется *геометрией Лобачевского*. В настоящей главе мы докажем полноту системы аксиом геометрии Лобачевского и изоморфизм всех ее реализаций. Это позволит теоремы геометрии Лобачевского получать в любой из ее реализаций.

Сейчас мы рассмотрим некоторые вспомогательные предложения, относящиеся к так называемой абсолютной геометрии. Это предложения, которые выводятся на основе первых четырех групп аксиом эвклидовой геометрии и, таким образом, имеют место как в эвклидовой геометрии, так и в геометрии Лобачевского*.

Четырехугольником Саккери называется такой четырехугольник, у которого два смежных угла прямые, а противоположные стороны, прилегающие к этим углам, равны. Будем называть сторону четырехугольника Саккери, соединяющую вершины прямых углов, нижним основанием, а смежные с ней стороны — боковыми сторонами.

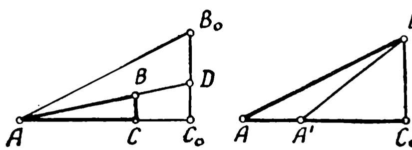
* Заметим, что теоремы 1—39 гл. III относятся к абсолютной геометрии. В их доказательстве мы не пользовались аксиомой параллельности.

Лемма 1. *Углы при верхнем основании четырехугольника Саккери равны, и каждый из них не больше прямого угла*

Равенство углов при верхнем основании следует из симметрии четырехугольника относительно перпендикуляра, проведенного через середину нижнего основания. Если предположить, что углы при верхнем основании тупые, то по крайней мере один из треугольников, на которые четырехугольник разбивается диагональю, имеет сумму углов больше двух прямых, что невозможно (гл. I § 2). Утверждение доказано.

Лемма 2. *Если прямоугольный треугольник ABC изменяется так, что его стороны остаются меньше c, а острый угол B остается меньше $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$, то острый угол A при этом остается больше некоторого $\varepsilon' > 0$, зависящего от ε и c.*

Построим прямоугольный треугольник AB_0C_0, у которого катет AC_0 равен c, а угол B_0 больше $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ (черт. 13). Такой треугольник строится без труда.



Черт. 13.

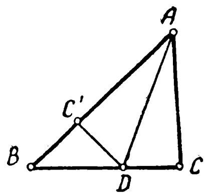
Именно, сначала строим прямоугольный треугольник $A'B_0C_0$ с гипотенузой $A'B_0$, равной c, и углом B_0, равным $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$. А затем берем точку A на продолжении катета C_0A' так, чтобы $AC_0 = c$.

Утверждается, что угол A треугольника ABC не меньше угла B_0AC_0 Допустим, утверждение неверно Тогда продолжение AB пересекает отрезок B_0C_0 в некоторой точке D

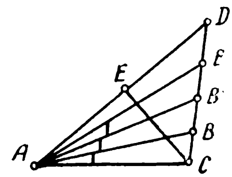
Так как сумма углов четырехугольника $CBDC_0$ не больше четырех прямых, то угол ABC не меньше угла BDC_0. А по теореме о внешнем угле треугольника угол BDC_0 больше угла AB_0C_0. Таким образом, угол B треугольника ABC больше $\angle AB_0C_0$, что невозможно. Утверждение доказано.

Лемма 3. *Биссектриса угла A треугольника ABC разбивает противоположную сторону BC на отрезки BD и DC. Если угол B меньше угла C, то $DC < BD$* (черт. 14).

Построим на AB точку C' так, чтобы $AC = AC'$ Угол $BC'D$ больше угла ABC. Отсюда $BD > DC' = DC$.



Черт. 14.



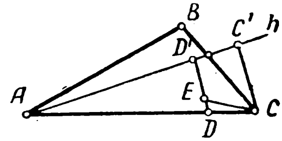
Черт. 15.

Лемма 4. *Если стороны треугольника ABC остаются ограниченными, угол α при вершине A неограниченно убывает, а угол при вершине C заключен в пределах* ε, $\pi - \varepsilon\ (\varepsilon > 0)$, то $BC/AC \to 0$ (черт. 15).

Отложим на прямой CB отрезок CD, равный AC так, чтобы угол ACD был не меньше прямого. По лемме 2 в применении к прямоугольному треугольнику ACE угол DAC больше некоторого $\varepsilon' > 0$. Проведем из точки A лучи AB', AB'',... образующие друг с другом углы, равные α. По лемме 3 $BC < B'B < B''B' < \ldots$

Отсюда $CD/BC = AC/BC > \frac{\varepsilon'}{\alpha} - 1$.

И так как $\alpha \to 0$, то $BC/AC \to 0$.



Черт. 16.

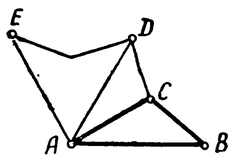
Лемма 5. *Если треугольник ABC изменяется так, что его стороны AB и AC остаются больше $c > 0$, а сторона BC неограниченно убывает, то угол A треугольника тоже неограниченно убывает.*

Допустим, для некоторой подпоследовательности треугольников ABC угол A больше $\alpha_0 > 0$. Построим луч h, образующий угол α_0 со стороной AC (черт. 16), и точку D на AC, отстоящую от A на c. Опустим из точек C и D перпендикуляры на луч h.

CC' не меньше DD', так как в противном случае угол E четырехугольника Саккери $D'ECC'$ был бы тупой, как внешний угол треугольника EDC с тупым углом D.

Так как BC больше CC', то $BC > DD'$. И мы приходим к противоречию ($BC \to 0$). Утверждение доказано.

Лемма 6. *Если треугольник ABC изменяется так, что каждый из его углов остается больше ε, то отношение сторон остается в положительных пределах, зависящих от ε.*



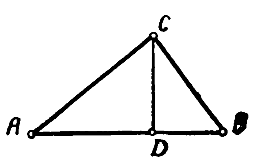
Черт. 17.

Пусть AB — большая, а BC — меньшая из сторон треугольника. Отразим треугольник зеркально в стороне AC (черт. 17). Полученную фигуру отразим зеркально в AD и т. д. до тех пор, пока угол, образуемый крайними отрезками при вершине A, не станет тупой. Полученная фигура состоит из некоторого числа, не большего $\frac{\pi}{\varepsilon}$, треугольников, равных ABC.

Так как EB больше AB (угол EAB тупой), а ломаная, соединяющая E и B, имеет длину не большую $\frac{\pi}{\varepsilon}BC$, то $AB/BC < \frac{\pi}{\varepsilon}$. Утверждение доказано.

Лемма 7. *Если прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C изменяется так, что его стороны остаются ограниченными, а острый угол A неограниченно убывает, то*

$$\frac{AB - AC}{BC} \to 0.$$



Черт. 18.

Проведем высоту CD из прямого угла C (черт 18). Из леммы 2 следует, что угол B стремится к $\frac{\pi}{2}$. А так как сумма углов треугольника не больше π, то угол C треугольника BCD стремится к нулю. И по лемме 4 $BD/BC \to 0$, а $BD > AB - AC$. Утверждение доказано.

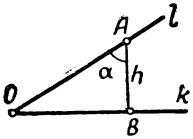
§ 2. Некоторые вспомогательные функции

Пусть (l, k) — острый угол с вершиной O. Возьмем на луче l произвольную точку A и опустим из нее перпендикуляр AB (черт. 19). Мы будем рассматривать три функции:

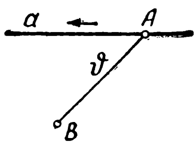
$$s(B) = OB,\ h(A) = AB \text{ и } \alpha(A) = \angle OAB.$$

Лемма 8. *Каждая из трех функций $s(B)$, $h(A)$ и $\alpha(A)$ непрерывна. Функции $s(B)$ и $h(A)$ монотонны и выпуклы*.*

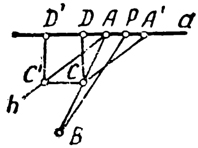
Пусть теперь a — произвольная прямая, на которой выбрано какое-нибудь направление (черт. 20). Пусть A — произвольная точка на прямой, а точка B — вне прямой. Мы будем рассматривать еще две функции $\vartheta(A, B)$ — угол, который образует отрезок AB с положительным направлением на прямой a, и $\rho(A)$ — расстояние от B и A.



Черт. 19.



Черт. 20.



Черт. 21.

Лемма 9. *Функция $\vartheta(A, B)$ непрерывна по обоим аргументам, строго монотонна при фиксированном B и изменяется в пределах от нуля до π. Функция $\rho(A)$ непрерывна, выпукла, имеет непрерывную первую производную, и эта производная зависит только от ϑ. Если A — основание перпендикуляра, опущенного на прямую a, то $\rho'(A) = 0$. При $A \to \infty$ $\rho'(A) \to \pm 1$.*

Начнем с доказательства леммы 9. Непрерывность следует из неравенства треугольника (теорема 33).

$$|\rho(A) - \rho(A')| < AA'.$$

Докажем непрерывность ϑ. Отложим от прямой a в точке A угол $\vartheta(A, B) - \varepsilon$, где ε — малое положительное число (черт. 21). На стороне h этого угла и отрезке AB возьмем близкие к A равноотстоящие от прямой a точки и построим равные прямоугольные треугольники $C'D'A$ и CDA'. Так как угол DAC больше угла $DA'C$, то A — между D и A'. Теперь для любой точки P отрезка AA' по теореме о внешнем угле треугольника получается

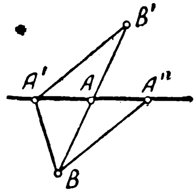
$$\vartheta(A, B) - \varepsilon < \vartheta(P, B) < \vartheta(A, B).$$

---

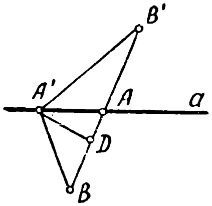
* Мы ставим в качестве аргумента точку, подразумевая расстояние ее от точки O.

Отсюда непрерывность ϑ при фиксированном положении B справа от A. Непрерывность слева от A устанавливается аналогично. Дальше заключаем о непрерывности по обоим аргументам A и B с помощью леммы 5.

Монотонность $\vartheta(A, B)$ при фиксированном B очевидным образом следует из теоремы о внешнем угле треугольника.



Черт. 22.



Черт. 23.

Докажем теперь выпуклость функции $\rho(A)$. Возьмем на прямой a равноотстоящие от A точки A' и A'' (черт. 22). На продолжении отрезка AB за точку A отложим отрезок AB', равный AB. Так как $B'A' = \rho(A'')$, $BA' = \rho(A')$, а $BB' = 2\rho(A)$, то по неравенству треугольника

$$2\rho(A) < \rho(A') + \rho(A'').$$

А это после того, как непрерывность функции ρ установлена, гарантирует ее выпуклость.

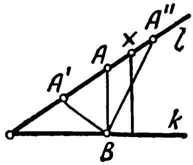
Докажем дифференцируемость ρ. Так как функция ρ выпуклая, то она имеет правую и левую производные. Повторим построение чертежа 22 (черт. 23). Предел отношения $(A'B + A'B' - 2AB)/A'A$ при $A' \to A$ равен разности правой и левой производной ρ в точке A. Покажем, что этот предел равен нулю. Опустим из A' перпендикуляр на BB'. Тогда рассматриваемое отношение можно представить так

$$\frac{BA' - BD}{AA'} + \frac{B'A' - B'D}{AA'}.$$

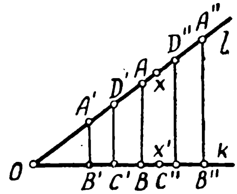
Здесь каждое из слагаемых при $A' \to A$ стремится к нулю по лемме 7. Таким образом, правая и левая производные ρ равны. Отсюда непрерывная дифференцируемость ρ.

То, что производная ρ' зависит только от ϑ — угла, образуемого отрезком AB с прямой a,— и не зависит от расстояния между A и B, устанавливается точно так же, как равенство правой и левой производной с той лишь разницей, что точка B' на продолжении отрезка BA берется произвольно.

Если A — основание перпендикуляра, опущенного из B на прямую a, то $\rho'(A) = 0$. При $A \to \infty$ $\rho'(A) \to \pm 1$. Оба эти утверждения легко следуют из леммы 7.



Черт. 24.



Черт. 25

Доказательство леммы 8. Возьмем настолько близкие от A точки A' и A'', чтобы углы $\vartheta(B, A')$ и $\vartheta(B, A'')$ отличались не более, чем на ε от $\alpha(A)$ (черт. 24). Это гарантируется непрерывностью функции ϑ. По теореме о внешнем угле треугольника для любой точки X отрезка $A'A''$ $\vartheta(B, A') > \alpha(X) > \vartheta(B, A'')$, что и доказывает непрерывность функции α. Обратимся теперь к функциям s и h. Возьмем на луче l две точки A' и A'' на расстоянии ε от A по разные стороны от A. Опустим из них перпендикуляры $A'B'$ и $A''B''$. Тогда для любой точки X отрезка $B'B''$ будем иметь $|s(B) - s(X)| < \varepsilon$. И следовательно, s непрерывна.

Докажем непрерывность h. Возьмем на луче l точки A' и A'' на расстоянии $\frac{\varepsilon}{2}$ от точки A по разные стороны от A (черт. 25). Опустим из них перпендикуляры $A'B'$ и $A''B''$. Возьмем теперь на отрезках BB' и BB'' точки C' и C'' так, чтобы они были на расстоянии меньшем $\frac{\varepsilon}{2}$ от B, и восстановим перпендикуляры в этих точках $C'D'$ и $C''D''$. Теперь для каждой точки X отрезка $D'D''$ $|h(A) - h(x)| < \varepsilon$. В самом деле, по свойству ломаной и ее замыкающей

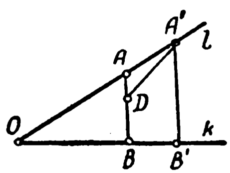
$$XX' < X'B + BA + AX < BA + \varepsilon.$$

Аналогично

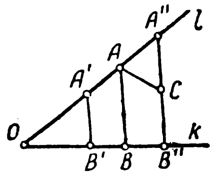
$$BA < X'X + \varepsilon.$$

Отсюда $|h(A) - h(X)| < \varepsilon$, т. е. непрерывность функции h.

Очевидно, что функция $s(B)$ монотонно возрастающая.



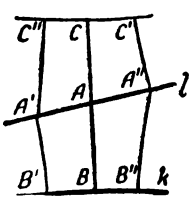
Черт. 26.



Черт. 27.

Докажем монотонность h. Возьмем точку A' за точкой A на луче l (черт. 26). Утверждаем, что $A'B' > AB$. В противном случае на BA есть точка D такая, что $BD = B'A'$. И в четырехугольнике Саккери $BDA'B'$ будет угол D тупой, что невозможно.

Докажем выпуклость функции s. Возьмем на k равноотстоящие от B точки B' и B'' и восстановим перпендикуляры $B'A'$ и $B''A''$ (черт. 27). Построим точку C так, чтобы $B'A' = B''C$. Так как угол ACA'' равен углу $OA'B'$, а этот угол не меньше $AA''C$, то по свойству стороны треугольника, лежащей против большего угла, $AA'' \geqslant AC = AA'$. Отсюда следует, что $s(A') + s(A'') \geqslant 2s(A)$, что и указывает на выпуклость функции s.



Черт. 28.

Докажем выпуклость функции h. Возьмем равноотстоящие от A точки A' и A'' и опустим из них перпендикуляры $A'B'$ и $A''B''$ (черт. 28). Дополним теперь чертеж по симметрии относительно точки A. Тогда CB будет общим перпендикуляром двух прямых. Рассуждением, подобным тому, как при доказательстве монотонности h, легко заключаем, что он не длиннее любого другого перпендикуляра, опущенного из точки одной прямой на другую. Тем более ломаная $B'A'C''$ не меньше BC. Отсюда

$$h(A') + h(A'') \geqslant 2h(A),$$

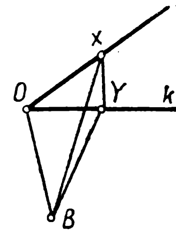
что в силу непрерывности h дает выпуклость. Лемма доказана.

§ 3. Теорема Пифагора «в малом»

Согласно лемме 9, производная функция ρ представляет собой некоторую функцию $\varphi(\vartheta)$ угла ϑ. Так как ρ — выпуклая функция, то ее производная — монотонная функция. А так как ϑ (A, B) является строго монотонной функцией при фиксированном B, то $\varphi(\vartheta)$ — непрерывная монотонная функция. Выясним вид этой функции.

Лемма 10. *Функция* $\varphi(\vartheta) = \pm\cos\vartheta$.

Доказательство. Возьмем произвольный угол (l, k), с вершиной O и произвольную точку B, не совпадающую с O (черт. 29).



Черт. 29.

Имеем тождество

$$(\rho(X) - \rho(O)) + (\rho(Y) - \rho(X)) + \\ + (\rho(O) - \rho(Y)) \equiv 0.$$

Применяя к каждой скобке теорему о среднем, получим

$$OX\varphi(\vartheta_1^*) + XY\varphi(\vartheta_2^*) + YO\varphi(\vartheta_3^*) = 0,$$

где ϑ_1^*, ϑ_2^*, ϑ_3^* — значения ϑ, отвечающие некоторым точкам отрезков OX, XY и OY соответственно. Отсюда

$$\frac{OX}{OY}\varphi(\vartheta_1^*) + \frac{XY}{OX}\cdot\frac{OX}{OY}\varphi(\vartheta_2^*) + \varphi(\vartheta_3^*) = 0.$$

Так как функции s и h выпуклые (лемма 8), то каждое из отношений OX/OY и XY/OX стремится к определенному пределу при $X \to O$. В силу леммы 6 эти пределы отличны от нуля.

Из непрерывности φ и непрерывности функции ϑ следует, что при $X \to O$ $\varphi(\vartheta_1^*) \to \varphi(\vartheta_1)$, $\varphi(\vartheta_2^*) \to \varphi(\theta_2)$, $\varphi(\vartheta_3^*) \to \varphi(\theta_3)$, где ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 — углы, образованные отрезком OB с l, k и перпендикуляром к k соответственно. Таким образом, в пределе при $X \to O$ получается следующее соотношение:

$$\lambda\varphi(\vartheta_1) + \mu\varphi(\vartheta_2) + \varphi(\vartheta_3) = 0,$$

где

$$\lambda = \lim\frac{OX}{OY}, \quad \mu = \lim\frac{XY}{OX}\cdot\frac{OX}{OY}.$$

Если мы отрезок OB повернем на угол τ, то придем к соотношению

$$\lambda\varphi(\vartheta_1+\tau)+\mu\varphi(\vartheta_2+\tau)+\varphi(\vartheta_3+\tau)=0.$$

Так как функция $\varphi(\vartheta)$ непрерывна и монотонна, то ее можно разложить в ряд Фурье

$$\varphi(\vartheta)=\sum c_n e^{in\vartheta}.$$

Подставляя это разложение в соотношение, полученное выше, получим

$$c_n e^{in\tau}(\lambda e^{in\vartheta_1}+\mu e^{in\vartheta_2}+e^{in\vartheta_3})=0.$$

Отсюда в силу произвольности τ

$$\lambda e^{in\vartheta_1}+\mu e^{in\vartheta_2}+e^{in\vartheta_3}=0.$$

Обозначим $\alpha_1=\vartheta_1-\vartheta_3$, $\alpha_2=\vartheta_2-\vartheta_3$. Угол α_1 с точностью до знака представляет собой угол смежный (l, k), а $\alpha_2=\pm\frac{\pi}{2}$. Вводя вместо ϑ_1 и ϑ_2 α_1 и α_2, получим

$$\lambda e^{in\alpha_1}+\mu e^{in\alpha_2}+1=0.$$

Отделяя в этом соотношении мнимую часть и подставляя $\alpha_2=\frac{\pi}{2}$, будем иметь

$$\lambda\sin n\alpha_1+\mu\sin\frac{n\pi}{2}=0.$$

Теперь утверждается, что в разложении функции $\varphi(\vartheta)$ все коэффициенты c_k при $|k|>1$ равны нулю. Покажем это сначала для четных k. Так как $\sin\frac{k\pi}{2}=0$, то $\lambda\sin k\alpha_1=0$. Но $\lambda\neq 0$, а α_1 произвольно, и мы приходим к противоречию.

Пусть теперь $c_{k'}\neq 0$ и $c_{k''}\neq 0$, причем $|k'|\neq|k''|$ — оба нечетные. Тогда $\lambda\sin k'\alpha_1\pm\mu=0$. $\lambda\sin k''\alpha_1\pm\mu=0$. Отсюда $\sin k'\alpha_1=\pm\sin k''\alpha_1$, что невозможно при произвольном α_1.

Итак, в разложении функции $\varphi(\vartheta)$ могут быть отличными от нуля только c_0, c_k и c_{-k}, причем k нечетно. Отсюда следует, что

$$\varphi(\vartheta)=c+a\sin k\vartheta+b\cos k\vartheta.$$

Так как функция $\varphi(\vartheta)$ монотонна в интервале $(0, \pi)$, то k не может быть больше единицы, а следовательно, равно единице.

Так как $\varphi\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, при $\vartheta \to 0 \, |\varphi(\vartheta)| \to 1$, то

$$\varphi(\vartheta) = \pm\cos\vartheta.$$

Лемма доказана.

Обратимся теперь к допредельному соотношению

$$OX\varphi(\vartheta_1^*) + XY\varphi(\vartheta_2^*) + YO\varphi(\vartheta_3^*) = 0.$$

Возьмем точку B достаточно далеко от O, а треугольник OXY малым. Тогда значения ϑ на каждой из сторон треугольника изменяются мало. Именно, можно считать, что на каждой стороне треугольника $|\varphi(\vartheta') - \varphi(\vartheta'')| < \varepsilon$, если стороны треугольника меньше некоторого δ. Это следует из непрерывности функции ϑ по обоим аргументам.

Пусть теперь точка B лежит на продолжении катета XY. Тогда $\varphi(\vartheta_3^*) = -1$, $|\varphi(\vartheta_2^*)| < \varepsilon$, $|\varphi(\vartheta_1^*)| - \cos\alpha| < \varepsilon$, где α — угол треугольника, противолежащий катету OY. Таким образом, мы приходим к следующему соотношению:

$$OX\cos\alpha - OY + \varepsilon' OX = 0,$$

где ε' — сколь угодно мало, если малы стороны треугольника.

Аналогично, беря точку B на продолжении другого катета, получим соотношение

$$OX\sin\alpha - XY + \varepsilon'' OX = 0.$$

Из этих двух соотношений получается следующая теорема.

Теорема 50. *В каждом прямоугольном треугольнике с прямым углом C*

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 + \varepsilon AB^2,$$

причем ε стремится к нулю вместе с гипотенузой треугольника.

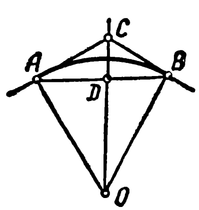
§ 4. Линейный элемент плоскости

Введем на плоскости полярные координаты u, v следующим образом. Из произвольной точки O начала координат проведем луч h и сопоставим каждой точке A плоскости два числа u — расстояние точки A от точки O и v — угол, который образует полупрямая OA с h в заданном направлении. Выразим расстояние между двумя близкими точками (u, v) и $(u + \Delta u, v + \Delta v)$ В связи с этим рассмотрим некоторые свойства окружности.

Длиной окружности называется предел длин, вписанных в нее ломаных при условии, что звенья ломаных неограниченно убывают. Мы не будем повторять хорошо известных рассуждений, устанавливающих существование длины окружности в этом смысле.

Лемма 11. *Длина дуги окружности эквивалентна стягивающей ее хорде. Длина окружности — выпуклая функция радиуса.*

Доказательство. Возьмем две близкие точки A и B на окружности (черт. 30). Когда точка $B \to A$ $\angle COB \to 0$, следовательно, $\angle ABO \to \frac{\pi}{2}$ и $\angle CBD \to 0$. По лемме 7 $BD/CB \to 1$, а $AB < \overset{\frown}{AB} < AC + CB$. Отсюда эквивалентность дуги окружности стягивающей ее хорде.



Черт. 30.

Докажем выпуклость длины окружности как функции радиуса. Возьмем три концентричные окружности k_1, k_2 и k_λ с радиусами ρ_1, ρ_2 и $\lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2 (0 < \lambda < 1)$. Проведем из центра O окружностей n лучей под равными углами и впишем в каждую окружность правильный n-угольник с вершинами на этих лучах. Обозначим a_1, a_2 и a_λ длины сторон многоугольников.

В силу свойства выпуклости функции h (лемма 8) стороны a_1, a_2 и a_λ многоугольников связаны неравенством

$$a_\lambda \leqslant \lambda a_1 + (1 - \lambda) a_2.$$

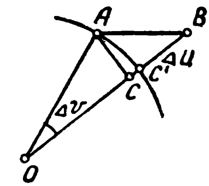
Умножая это неравенство на n и переходя к пределу при $n \to \infty$, получим соответствующее неравенство между длинами окружностей

$$l(\lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2) \leqslant \lambda l(\rho_1) + (1 - \lambda) l(\rho_2).$$

А это и указывает на выпуклость $l(\rho)$ длины окружности как функции радиуса.

Обозначим $\sqrt{G(u)}$ длину дуги окружности, отвечающей центральному углу в один радиан. Тогда углу Δv будет соответствовать дуга $\Delta v \sqrt{G(u)}$, а длина всей окружности $2\pi \sqrt{G(u)}$.

Чтобы найти расстояние между точками $A(u, v)$, $B(u+\Delta u, v+\Delta v)$, соединим эти точки с началом координат O и опустим из точки A перпендикуляр AC на OB (черт. 31). По теореме 50 $AB^2 = BC^2 + AC^2 + AB^2\varepsilon$; или, что то же самое, $AB^2 = BC^2 + AC^2 + \varepsilon_1 BC^2 + \varepsilon_2 AC^2$. Принимая во внимание, что дуга AC' эквивалентна отрезку AC, а отрезок CC' мал в сравнении с AC, можем записать $AB^2 = \widehat{AC'}^2 + C'B^2 + \varepsilon' \widehat{AC'}^2 + \varepsilon'' C'B^2$. Отсюда для расстояния Δs между близкими точками (u, v), $(u+\Delta u, v+\Delta v)$ получается следующая формула:



Черт. 31.

$$\Delta s^2 = \Delta u^2 + G\Delta v^2 + \varepsilon(\Delta u^2 + \Delta v^2),$$

причем $\varepsilon \to 0$, когда $\Delta u, \Delta v \to 0$.

Заметим, что, как это следует из вывода, при малых Δu, Δv в конечной части плоскости ε равномерно мало. Квадратичную форму

$$ds^2 = du^2 + G dv^2$$

мы будем называть линейным элементом плоскости.

Если длину кривой определить как предел длин ломаных, вписанных в эту кривую, при условии, что звенья ломаных неограниченно убывают, то для длины кривой $u = u(t)$, $v = v(t)$ получается известная из дифференциальной геометрии формула

$$s = \int \sqrt{u'^2 + Gv'^2} dt.$$

Составим дифференциальное уравнение прямой. Мы знаем что производная от u по дуге прямой равна косинусу угла, образуемого лучом, исходящим из начала координат в точке пересечения с прямой

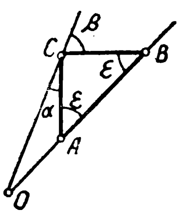
$$\cos\vartheta = \frac{du}{\sqrt{du^2 + Gdv^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Gv'^2}}.$$

Отсюда следует, что в координатах u, v прямая линия является гладкой (v' — непрерывная функция).

Так как прямые — кратчайшие линии, то они являются экстремалями функционала

$$I = \int \sqrt{1 + Gv'^2}du.$$

Подынтегральная функция не зависит от v, поэтому экстремали задаются уравнением



Черт. 32.

$$\frac{Gv'}{\sqrt{1 + Gv'^2}} = \mathrm{const}.$$

Это и есть дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют прямые линии. С помощью формулы для $\cos \vartheta$ его можно преобразовать к виду

$$\sin \vartheta \sqrt{G} = \mathrm{const}.$$

До сих пор мы о функции $\sqrt{G}$ знаем только, что она положительна, выпукла, а следовательно, непрерывна. Сейчас мы подвергнем ее дальнейшему исследованию.

Возьмем на луче $v = \mathrm{const}$ две точки $A(u, v)$ и $B(u + \Delta u, v)$ и построим равнобедренный треугольник ABC с углами при основании ε (черт. 32). Пусть ω — угол, смежный углу треугольника при вершине C. Рассмотрим предел ω/ε при $\varepsilon \to 0$. Уравнения прямых CB и CA соответственно

$$\sin \vartheta \sqrt{G} = \sqrt{G(A)} \sin(-\varepsilon),$$
$$\sin \vartheta \sqrt{G} = \sqrt{G(B)} \sin \varepsilon.$$

Из этих уравнений немедленно получается, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\beta}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{G(A)}}{\sqrt{G(\overline{C})}}, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{G(B)}}{\sqrt{G(\overline{C})}},$$

где $\overline{C}$ — средина между A и B. Отсюда

$$\lim \frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{G(A)} + \sqrt{G(B)}}{\sqrt{G(\overline{C})}} = \lambda.$$

Заметим, что λ зависит только от расстояния между точками A и B, т. е. только от $2h$.

Положим для краткости $\sqrt{G(u)} = g(u)$. Тогда $g(u)$ удовлетворяет конечно-разностному уравнению

$$g(u+2h) - \lambda g(u+h) + g(u) = 0. \qquad (*)$$

Так как функция g выпуклая, то

$$g(u+2h) + g(u) \geqslant 2g(u+h)$$

и, следовательно, $\lambda \geqslant 2$.

Из теории конечных разностей известно, что непрерывная функция g, удовлетворяющая уравнению (*), имеет вид

$$g = c_1 u + c_2, \text{ если } \lambda = 2,$$
$$g = c_1 e^{\sigma u} + c_2 e^{-\sigma u}, \text{ если } \lambda > 2.$$

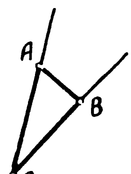
Так как при $u \to 0$ $g(u) \to 0$, то в первом случае $g = cu$, а во втором $g = c(e^{\sigma u} - e^{-\sigma u})$. Выясним, чему равны постоянные c в этих формулах.

Возьмем малый прямоугольный треугольник AOB с малым острым углом Δv в вершине O (черт. 33). Имеем

$AB \sim g\Delta v$, $OA = u$. Но $AB \sim OA \sin \Delta v$ (см. предыдущий параграф). Отсюда

$$g\Delta v = u \sin \Delta v.$$

Следовательно, при малых u $g \simeq u$. Поэтому в первом случае $c = 1$, а во втором $c = \frac{1}{2\sigma}$.



Черт. 33.

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 51. *Линейный элемент плоскости имеет одну из следующих форм, либо*

$$ds^2 = du^2 + u^2 dv^2, \text{ либо } ds^2 = du^2 + \left(\frac{\operatorname{sh} \sigma u}{\sigma}\right)^2 dv^2.$$

Заметим, что первая форма линейного элемента получается из второй в пределе, когда $\sigma \to 0$.

§ 5. Полнота системы аксиом геометрии Лобачевского. Изоморфизм всех ее реализаций

Теперь, когда найден коэффициент G линейного элемента плоскости, можно получить уравнение прямых в конечном виде. Дифференциальное уравнение прямых, как показано в предыдущем параграфе, имеет вид

$$\frac{Gv'}{\sqrt{1+Gv'^2}} = \text{const}.$$

Вдоль прямых, не проходящих через начало координат, можно рассматривать u как функцию v. Для таких прямых дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$\frac{u'^2}{G^2} + \frac{1}{G} = \text{const}.$$

Теперь введем новую неизвестную функцию λ, полагая при $G = u^2$ $\lambda = \frac{1}{u}$, а при $G = \frac{\operatorname{sh}^2 \sigma u}{\sigma^2}$ $\lambda = \operatorname{cth} \sigma u$. Тогда получим следующее уравнение для λ

$$\lambda'^2 + \lambda^2 = \text{const}.$$

Дифференцируя это уравнение, получим $\lambda'(\lambda'' + \lambda) = 0$. Так как u', а следовательно, λ', обращается в нуль только в одной точке, то $\lambda'' + \lambda = 0$. Общее решение этого уравнения, как известно, $\lambda = c_1 \cos v + c_2 \sin v$. Таким образом, мы получаем уравнение всех прямых, не проходящих через начало координат, в случае $G = u^2$:

$$1 = c_1 u \cos v + c_2 u \sin v.$$

Прямые, проходящие через начало координат, задаются уравнением $v = \text{const}$. Отсюда следует, что все прямые на плоскости в случае $G = u^2$ задаются уравнением

$$c_1 u \cos v + c_2 u \sin v + c_3 = 0.$$

Буквально так же интегрируется уравнение в случае $G = \frac{1}{\sigma^2} \operatorname{sh}^2 \sigma u$ и общее уравнение прямых получается в виде

$$c_1 \operatorname{th} \sigma u \cos v + c_2 \operatorname{th} \sigma u \sin v + c_3 = 0.$$

Введем теперь вместо u, v координаты x и y, полагая в первом случае $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, а во втором $x = \operatorname{th} \sigma u \cos v$, $y = \operatorname{th} \sigma u \sin v$. В первом случае x

и y могут принимать любые значения, во втором же случае, так как $|\operatorname{th}\sigma u| < 1$,

$$x^2 + y^2 = \operatorname{th}^2 \sigma u < 1.$$

В обоих случаях прямые задаются линейным уравнением $c_1 x + c_2 y + c_3 = 0$.

Очевидно, в первом случае выполняется аксиома параллельности Эвклида, а во втором — аксиома параллельности Лобачевского.

Как выражается в координатах условие следования точек на прямой в том или другом направлении?

В случае полярных координат u, v для прямой, не проходящей через начало O, следование точек в том или другом направлении выражается, очевидно, в монотонности v, а для прямой, проходящей через начало координат, в монотонности u. Если принять во внимание связь между u,v и x,y, то можно показать, что в координатах x,y следование точек в том или другом направлении выражается в монотонности x и y, подобно тому как в декартовой реализации.

Какие преобразования координат x,y задают движения в плоскости Лобачевского?

Если сопоставить точке плоскости Лобачевского с координатами x,y точку эвклидовой плоскости с теми же декартовыми координатами, то речь идет о преобразованиях круга $x^2 + y^2 < 1$ в себя, при которых прямые переходят в прямые. Известно, что все такие преобразования являются проективными. Но всякое ли такое преобразование является движением?

Пусть S — какое-нибудь проективное преобразование, переводящее круг $x^2 + y^2 < 1$ в себя. Оно переводит точку $(0,0)$ в некоторую точку A, полупрямую $x > 0$ $y = 0$ — в полупрямую a и полуплоскость $y > 0$ — в некоторую полуплоскость α. По аксиоме III_7 существует движение, т. е. проективное преобразование, обладающее указанными свойствами S. А как показано при построении реализации K в § 5 гл. III, S единственно. Отсюда следует, что S — движение.

Так как при введении координат x,y мы не конкретизировали реализацию геометрии Лобачевского, то вышеизложенное позволяет заключить, что каждая реализация геометрии Лобачевского изоморфна ее K реализации. Эта реализация была указана Ф. Клейном. Так как две реализации, изоморфные третьей, изоморфны друг другу, то мы доказали, таким образом, следующую теорему.

Теорема 52. *Все реализации системы аксиом плоской геометрии Лобачевского изоморфны. И следовательно, система аксиом геометрии Лобачевского полна.*

§ 6. Важнейшие интерпретации геометрии Лобачевского

Часто реализацию системы аксиом геометрии Лобачевского называют также интерпретацией геометрии Лобачевского. С одной из интерпретаций мы познакомились в § 5 гл. III. Это интерпретация Клейна. Сейчас мы рассмотрим еще две интерпретации. Одна из них принадлежит Бельтрами, а другая — Пуанкаре.

Как известно, на поверхности F постоянной отрицательной гауссовой кривизны K можно ввести такую координатную сеть u, v, что линейный элемент ее будет иметь вид

$$ds^2 = du^2 + \left(\frac{\operatorname{sh} \sqrt{-K}u}{\sqrt{-K}}\right)^2 dv^2.$$

В точности такой же линейный элемент имеет и плоскость Лобачевского при $\sigma^2 = -K$. Сопоставим точке плоскости Лобачевского с координатами u, v точку поверхности F с теми же координатами. Так как прямые являются кратчайшими линиями, то им на поверхности F в силу изометрии установленного соответствия будут соответствовать геодезические. Так как движения сохраняют длины отрезков, то на поверхности F им соответствуют изометрические отображения, причем каждое изометрическое отображение соответствует некоторому движению.

Так мы получаем интерпретацию плоской геометрии Лобачевского. Эта интерпретация была указана Бельтрами. Недостатком ее является то, что в эвклидовом пространстве не существует полной поверхности постоянной отрицательной кривизны, не имеющей особенностей на конечном расстоянии. Таким образом, в этой интерпретации можно представить геометрию не всей плоскости Лобачевского, а только ее части.

Преимуществом данной интерпретации перед другими является то, что измерения отрезков и углов в ней ближе нашим наглядным представлениям, чем в других интерпретациях. Здесь расстояние между точками — это длина отрезка геодезической, соединяющей эти точки, а угол между прямыми есть не что иное, как угол между геодезическими в смысле дифференциальной геометрии. Первое очевидно, а второе следует из единственности угла, устанавливаемой теоремой 39.

Интерпретация Пуанкаре получается из интерпретации Клейна следующим образом. Круг $x^2 + y^2 < 1$ проектируется на полусферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $z > 0$, а полусфера — из полюса $(1,0,0)$ на плоскость yz (стереографическая проекция). В первом проектировании хорды круга перейдут в полуокружности на сфере, перпендикулярные экватору $z = 0$. А при втором проектировании эти полуокружности перейдут в полуокружности или полупрямые полуплоскости yz $z > 0$, перпендикулярные оси y (при стереографическом проектировании углы сохраняются и окружности переходят в окружности или прямые).

Таким образом, в интерпретации Пуанкаре прямые Лобачевского изображаются полуокружностями и полупрямыми полуплоскости yz $z > 0$, перпендикулярными оси y. Движениям в плоскости Лобачевского соответствуют преобразования полуплоскости $z > 0$, в себя переводящие полуокружности и полупрямые, перпендикулярные оси y, в полуокружности и полупрямые. Выясним, что представляют собой эти преобразования.

Очевидно, преобразования инверсии относительно центров на оси y, преобразования подобия относительно точек этой оси, зеркальные отражения в прямых, перпендикулярных оси y, и сдвиги вдоль оси y являются преобразованиями, переводящими полупрямые и полуокружности, перпендикулярные оси y, снова в полупрямые или полуокружности, перпендикулярные оси y. Каждое такое преобразование и их комбинация соответствуют некоторому движению в плоскости Лобачевского, так как ему соответствует коллинеация в интерпретации Клейна. Но всякое ли движение получается одним из указанных способов? Для того чтобы ответить на этот вопрос утвердительно, надо показать, что этих преобразований достаточно, чтобы удовлетворить требованию существования движения, содержащегося в аксиоме III_7.

Пусть A, B — две точки, a и b — полупрямые и α, β — полуплоскости, о которых идет речь в аксиоме III_7. Надо указать движение, которое переводит A в B, a в b и α в β. Покажем, что указанных преобразований достаточно, чтобы это осуществить в интерпретации Пуанкаре. Если a — часть полуокружности, а не полупрямой, то мы подвергаем ее инверсии относительно одного из концов полуокружности и таким образом переводим в полупрямую, перпендикулярную оси y*. То же делаем и с b. Теперь сдвигом и зеркальным отражением совмещаем полуплоскости α и β. И наконец, подобием относительно конца полупрямой, на которой лежат a и b, совмещаем A и B. Следовательно, указанными выше преобразованиями и их комбинациями исчерпываются все движения плоскости Лобачевского в интерпретации Пуанкаре.

Заметим, что все перечисленные преобразования: инверсии, сдвиги, зеркальные отражения и подобия суть конформные преобразования. Отсюда следует с помощью утверждения единственности для меры угла (теорема 39), что в интерпретации Пуанкаре мера угла в смысле геометрии Лобачевского совпадает с мерой его в эвклидовой геометрии.

Покажем, что в интерпретации Пуанкаре окружности Лобачевского изображаются эвклидовыми окружностями. Действительно, окружность отличается тем, что она пересекает под прямым углом все прямые, проходящие через ее центр. Так как пучку прямых Лобачевского соответствует в интерпретации Пуанкаре пучок окружностей, а ортогональные траектории пучка окружностей, как известно, окружности, то мы и заключаем, что окружностям Лобачевского на полуплоскости Пуанкаре соответствуют окружности Эвклида.

Из интерпретации Пуанкаре на полуплоскости можно получить новую интерпретацию, подвергнув эту полуплоскость преобразованию инверсии относительно какой-нибудь точки дополнительной полуплоскости. При этом полуплоскость перейдет в некоторый круг $\varkappa$. Прямым Лобачевского в этой интерпретации соответствуют окружности и прямые, перпендикулярные окружности круга $\varkappa$. Движения осуществляются инверсиями относительно окружностей, перпендикулярных окружности $\varkappa$,

---

* При инверсии окружности относительно одной из ее точек эта окружность переходит в прямую.

зеркальными отражениями в диаметрах этой окружности и вращениями относительно круга. В этой интерпретации так же мера угла в смысле геометрии Лобачевского совпадает с эвклидовой мерой угла.

Описанную интерпретацию можно было бы получить и непосредственно из интерпретации Клейна, беря стереографическую проекцию не из полюса (1,0,0), а из полюса (0,0 — 1) на плоскость xy. Отсюда следует, что в интерпретации Клейна в центре круга мера угла в эвклидовой геометрии и геометрии Лобачевского совпадает.

Теперь еще несколько слов об измерении отрезков и углов в интерпретации Клейна. Пусть A и B — две точки плоскости Лобачевского в интерпретации Клейна, C и D — концы хорды, на которой лежит отрезок AB. Легко видеть, что функция для отрезков, определяемая формулой

$$\mu(AB) = k\,|\ln(ABCD)|,$$

где $(ABCD)$ обозначено ангармоническое отношение точек, обладает свойствами меры для отрезков, перечисленными в теореме 38. В самом деле μ — положительна. Она инвариантна относительно движений, так как инвариантно ангармоническое отношение относительно проективных преобразований. И наконец, она аддитивна, так как если точка X между A и B, то $(ABCD) = (AXCD)\,(XBCD)$. В силу утверждения единственности упомянутой теоремы и получается, что $\mu(AB)$ есть мера длины.

Аналогично функция, определяемая для углов формулой

$$\vartheta(h,\ k) = k\,|\ln(hk\alpha\beta)|,$$

где h, k — стороны угла, а α и β — касательные к окружности $x^2 + y^2 = 1$, проведенные из вершины угла, есть мера для углов. Для того чтобы прямому углу соответствовало значение $\frac{\pi}{2}$, надо взять $k = \frac{1}{2}$.

В заключение заметим, что существуют интерпретации Клейна и Пуанкаре для пространственной геометрии Лобачевского. В интерпретации Клейна точки Лобачевского изображаются точками шара $x^2 + y^2 + z^2 < 1$, прямые — отрезками эвклидовых прямых внутри шара, а плоскости — кусками эвклидовых плоскостей, содержащихся внутри шара. Порядок точек в смысле геометрии

Лобачевского совпадает с порядком их в эвклидовом смысле. Движения представляют собой проективные преобразования, сохраняющие ограничивающую шар сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, как целое.

§ 7. Некоторые факты геометрии Лобачевского

Теперь, когда доказан изоморфизм всех реализаций геометрии Лобачевского, истинность какого-либо утверждения этой геометрии достаточно установить в какой-нибудь из ее интерпретаций. Мы рассмотрим сейчас несколько примеров.

Совокупность прямых на плоскости, проходящих через точку A и не пересекающих прямую a, заполняет два вертикальных угла. Стороны этих углов тоже принадлежат к числу этих прямых.

Утверждение очевидно, достаточно обратиться к интерпретации Клейна. Стороны этих вертикальных углов называются *параллелями Лобачевского*. Одна из них условно называется правой, другая — левой.

Параллельность прямых, по Лобачевскому, обладает следующими свойствами, легко устанавливаемыми с помощью интерпретации Клейна.

Если прямая a — параллельна b, то b — параллельна a; если b — параллельна a, и c — параллельна a в том же направлении, то b — параллельна c.

Для того чтобы получить дальнейшие следствия, дадим проективную характеристику условия перпендикулярности прямых в интерпретации Клейна. Пусть в центре круга Клейна пересекаются прямые a и b под прямым углом в смысле Эвклида. Тогда они пересекаются под прямым углом и в смысле Лобачевского. Действительно, зеркальное отражение круга в одной из сторон угла переставляет смежные углы. Прямые, пересекающиеся в центре круга под прямым углом, полярно сопряжены относительно окружности круга. Так как движения Лобачевского суть проективные преобразования, сохраняющие окружность круга Клейна, то этим свойством полярной сопряженности обладают любые перпендикулярные прямые.

Отсюда следует, что для того чтобы провести перпендикуляр из данной точки A к данной прямой a в интерпретации Клейна, надо соединить A с полюсом прямой a.

Если две прямые a и b пересекаются, то они не имеют общего перпендикуляра. Действительно, перпендикуляр должен проходить через полюс a и полюс b, но тогда он является полярой точки пересечения a и b. Так как эта точка внутри круга, то ее поляра не пересекает круг.

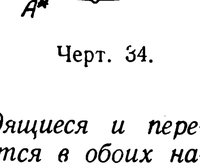
Если две прямые a и b не параллельны и не пересекаются (такие прямые называются расходящимися), то они имеют и притом один общий перпендикуляр. В интерпретации Клейна этот перпендикуляр есть поляра точки пересечения a и b.

Параллельные прямые a и b не имеют ни одного общего перпендикуляра. В интерпретации Клейна прямая, соединяющая полюсы a и b, касается окружности Клейна.

Пусть a и b — две любые прямые в плоскости Лобачевского. Тогда не всякая прямая, перпендикулярная a, пересекает b. Действительно, в интерпретации Клейна не всякая прямая, проходящая через полюс a и пересекающая круг, пересекает прямую b.

Если a и b — две параллельные прямые Лобачевского, то они неограниченно сближаются в одном направлении и неограниченно удаляются в другом.

Перпендикуляры к a проходят через полюс A^* этой прямой (черт. 34). Очевидно, когда прямая c приближается к прямой u, ангармоническое отношение $(ABCD) \to 1$, так как $AC/BC \to 1$ и $AD/BD \to 1$. Следовательно, $\mu(AB) \to 0$. Когда же прямая C приближается к v, $BD/BC \to 0$, а AD/AC стремится к отличному от нуля пределу. Отсюда $\mu(AB) \to \infty$.



Черт. 34.

Аналогично доказывается, что *расходящиеся и пересекающиеся прямые неограниченно удаляются в обоих направлениях.*

В интерпретации Пуанкаре пучок параллелей Лобачевского изображается пучком полуокружностей, касающихся в концевых точках, или пучком параллельных полупрямых.

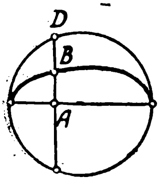
Кривая в плоскости Лобачевского называется *орициклом*, если она пересекает под прямым углом пучок параллельных прямых. Очевидно, *в полуплоскости Пуан-*

каре yz $z > 0$ *орицикл представляет собой либо окружность, касающуюся края полуплоскости — прямой* $z = 0$, *либо прямую* $z = \text{const}$.

Прямая и орицикл либо не имеют общих точек, либо касаются, либо пересекаются в двух точках под равными углами, либо пересекаются в одной точке под прямым углом.

В интерпретации Пуанкаре эти утверждения достаточно очевидны.

Все орициклы конгруентны. Действительно, подобием, сдвигом и инверсией в интерпретации Пуанкаре любые два орицикла легко совмещаются. Более того, можно даже при этом совместить данную точку одного орицикла с данной точкой другого, данное направление на одном орицикле с данным направлением другого.



Черт. 35.

Эквидистантой прямой a называется геометрическое место точек плоскости, равноотстоящих от a. *Если a является диаметром круга в интерпретации Клейна, то эквидистанта представляет собой половину эллипса, которая получается из полуокружности сжатием ее относительно диаметра a.* В самом деле, перпендикуляры a будут перпендикулярами в смысле Эвклида (черт. 35). И так как $AC/AD = 1$, то постоянство $\mu(AB)$ указывает на постоянство отношения BD/BC. Отсюда постоянство AB/AD. И утверждение доказано. Для любой другой прямой a эквидистанта получается соответствующей коллинеацией. *Во всяком случае это дуга эллипса, касающаяся круга в концевых точках.*

Рассмотрим некоторые предложения геометрии Лобачевского в пространстве. При этом мы будем предполагать доказанным изоморфизм всех реализаций пространственной системы аксиом.

Орисферой называется поверхность, пересекающая под прямым углом связку параллельных прямых в смысле Лобачевского.

В пространственной интерпретации Пуанкаре связка параллелей Лобачевского состоит либо из связки полуокружностей, касающихся друг друга в концевых точках, либо из всех прямых, перпендикулярных граничной полуплоскости. Отсюда следует, что *орисфера представ-*

ляет собой либо сферу, касающуюся граничной плоскости, либо плоскость, ей параллельную.

Очевидно, *каждая плоскость, проходящая через прямую связки, определяющей орисферу, пересекает орисферу по орициклу.*

Орисферу можно двигать в себе с таким же произволом, с каким движется в себе плоскость. При этом орициклы будут переходить в орициклы. Действительно, возьмем орисферу в интерпретации Пуанкаре в виде плоскости, параллельной граничной плоскости. В этом случае связка параллелей Лобачевского состоит из всех прямых, перпендикулярных граничной плоскости. Каждое эвклидово движение, при котором граничная плоскость переходит сама в себя, есть в то же время движение в смысле геометрии Лобачевского. Оно переводит нашу орисферу в себя и орициклы в орициклы.

На орисфере реализуется плоская геометрия Эвклида, если под прямыми понимать орициклы, порядок точек определить через порядок прямых в пучке параллелей, определяющем орицикл, а движением называть такие движения в пространстве Лобачевского, которые переводят орисферу в себя.

В интерпретации Пуанкаре с помощью установленных выше свойств орицикла и орисферы это утверждение легко проверяется. Именно, проектирование орисферы $z = \text{const}$ на плоскость xy прямыми, параллельными оси z, и указанное выше соответствие движений есть изоморфизм.

Эта интерпретация геометрии Эвклида в пространстве Лобачевского аналогична интерпретации Бельтрами, в которой реализуется геометрия Лобачевского на поверхности эвклидова пространства.

ГЛАВА V

ОСНОВЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Аксиомы связи. Теорема Дезарга

Возникновение проективной геометрии относится к первой половине XIX века и связано с именем французского геометра Понселе (1788—1867 гг.), который определил объект изучения в проективной геометрии — свойства фигур и связанных с ними величин, инвариантные относительно любого проектирования.

Многочисленными фактами обогатили проективную геометрию Шаль (1793—1880 гг.) и Штейнер (1769—1863 гг.). Благодаря работам Штаудта (1798—1867 гг.) проективная геометрия была освобождена от чуждого ей понятия метрики и превратилась в дисциплину, изучающую только свойства взаимного расположения геометрических фигур.

Проективная геометрия строится на системе аксиом, которая состоит из трех групп: аксиомы связи, аксиомы порядка и аксиома непрерывности.

В группе аксиом связи речь идет о свойствах взаимного расположения точек, прямых и плоскостей, выражаемых словом «принадлежать». При этом остаются в силе соглашения об эквивалентности выражений, указанных при введении аксиом связи эвклидовой геометрии.

Аксиома I_1. *Каковы бы ни были точки A и B, существует прямая, проходящая через точки A и B.*

Аксиома I_2. *Каковы бы ни были две точки A и B, существует не более одной прямой, проходящей через точки A и B.*

Аксиома I_3. *На каждой прямой имеется не менее трех точек. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.*

Аксиома I_4. *Через каждые три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, проходит некоторая плоскость α. На каждой плоскости имеется по крайней мере одна точка.*

Аксиома I_5. *Через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит не более одной плоскости.*

Аксиома I_6. *Если две точки A и B прямой a лежат на плоскости α, то каждая точка этой прямой лежит на плоскости α.*

Аксиома I_7. *Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют еще по крайней мере одну общую точку.*

Аксиома I_8. *Имеется не менее четырех точек, не лежащих в одной плоскости.*

Аксиома I_9. *Каждые две прямые, расположенные в одной плоскости, имеют общую точку.*

Мы видим, что система аксиом связи проективной геометрии содержит в себе систему аксиом связи эвклидовой геометрии и отличается от нее только аксиомой I_3, где требуется существование на прямой по крайней мере трех точек, и аксиомой I_9, где утверждается, что любые две прямые, лежащие в одной плоскости, пересекаются.

Отсюда заключаем, что все следствия аксиом связи эвклидовой геометрии верны также в проективной геометрии. Аксиомы I_3 и I_9 позволяют расширить совокупность этих следствий, в частности легко доказывается, что

1) *прямая и плоскость всегда имеют общую точку,*

2) *две плоскости имеют общую прямую,*

3) *три плоскости имеют общую точку.*

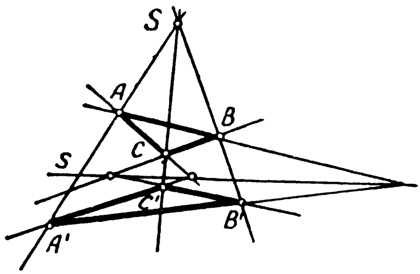
Важнейшим из следствий аксиом связи проективной геометрии является теорема Дезарга о перспективном расположении трехвершинников.

Трехвершинником называется фигура, составленная из трех точек, не лежащих на одной прямой (вершин трехвершинника) и трех прямых, попарно соединяющих эти точки (сторон трехвершинника). Говорят, что трехвершинники ABC и $A'B'C'$ имеют центр перспективы S, если вершины A и A', B и B', C и C' лежат на прямых, проходящих через S. Трехвершинники ABC и $A'B'C'$

имеют ось перспективы s, если стороны AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, AC и $A'C'$ пересекаются в точках, лежащих на s.

Теорема 53. *Если трехвершинники ABC и $A'B'C'$ имеют ось перспективы, то они имеют центр перспективы. Обратно, если трехвершинники имеют центр перспективы, то они имеют ось перспективы* (черт. 36).

Доказательство. Во-первых, заметим, что если у трехвершинников совпадают две соответствующие вершины или стороны, то утверждение теоремы достаточно оче-



Черт. 36.

видно. Поэтому в доказательстве можно ограничиться случаем, когда соответствующие вершины и соответствующие стороны трехвершинников различны.

Предположим сначала, что плоскости σ и σ', в которых лежат трехвершинники, различны. Тогда эти плоскости пересекаются по прямой s, причем точками s исчерпываются все общие точки плоскостей σ и σ'.

Пусть трехвершинники имеют ось перспективы. Так как стороны AB и $A'B'$ пересекаются, но различны, то существует и притом единственная плоскость γ, проходящая через эти стороны. Аналогично определяются плоскости α и β, проходящие через стороны BC и $B'C'$, AC и $A'C'$ соответственно. Так как плоскости σ и σ' различны, то все плоскости α, β, γ различны, причем α и β пересекаются по CC', β и γ — по AA', а γ и α — по BB'. Отсюда следует, что точка S, общая для всех плоскостей α, β, γ, является центром перспективы трехвершинников.

Пусть трехвершинники имеют центр перспективы. Так как прямые AA' и BB' пересекаются, то A, A', B, B' лежат в одной плоскости. Отсюда следует, что прямые AB и $A'B'$ пересекаются, а так как плоскости σ и σ' трехвершинников различны, то точка пересечения прямых AB и $A'B'$ принадлежит прямой s, по которой пересекаются плоскости σ и σ'. Аналогично показывается, что стороны AC и $A'C'$, BC и $B'C'$ тоже пересекаются на s. И следовательно, трехвершинники имеют ось перспективы s.

Пусть теперь оба трехвершинника лежат в одной плоскости σ и s — ось перспективы трехвершинников. Проведем через s плоскость σ', отличную от σ. Такая плоскость существует. В самом деле, по аксиоме III_8 существует точка P, не лежащая на плоскости σ, по аксиоме I_2 существуют две точки Q, R на s. Плоскость σ' проходит через P, Q и R. Она отлична от σ в силу аксиомы I_5.

Возьмем теперь точку O вне плоскостей σ и σ'. Такая точка существует. Действительно, существуют четыре точки K, L, M, N, не лежащие в одной плоскости. По крайней мере, одна из точек не лежит в плоскости σ. Пусть это будет N. Спроектируем K, L и M из центра N на плоскость σ. Полученные при этом точки $\overline{K}$, $\overline{L}$, $\overline{M}$ не лежат на одной прямой. Следовательно, в плоскости σ есть точка, не лежащая на прямой s. Точно так же доказывается существование такой точки на плоскости σ'. Прямая, соединяющая эти точки, имеет еще по крайней мере одну точку O (аксиома I_3). Эта точка лежит вне плоскостей σ и σ'.

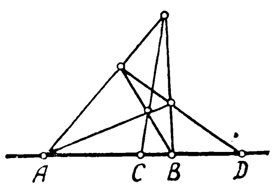
Спроектируем трехвершинник $A'B'C'$ на плоскость σ' из точки O. При этом получим трехвершинник $A''B''C''$. Прямая s для трехвершинников ABC и $A''B''C''$ является осью перспективы. Следовательно, по доказанному они имеют центр перспективы S. Пусть $\overline{S}$ — проекция S из центра O на плоскость σ. Утверждаем, что $\overline{S}$ есть центр перспективы трехвершинников ABC и $A'B'C'$.

Действительно, прямые AA'', BB'', CC'' пересекаются в S. А значит, их проекции AA', BB', CC' на плоскость σ пересекаются в точке $\overline{S}$.

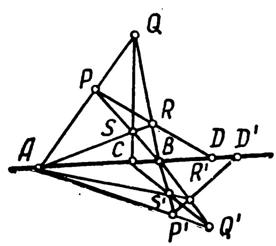
Пусть теперь трехвершинники расположены в одной плоскости σ и имеют центр перспективы S. Возьмем вне σ точку O. На прямой OA найдется точка $\overline{A}$, отличная от A и O. Соединим ее с S прямой g. Спроектируем на g из O точку A' и обозначим проекцию ее $\overline{A}'$. Для трехвершинников $\overline{A}BC$ и $\overline{A}'BC$ точка S — центр перспективы. По доказанному эти трехвершинники имеют ось перспективы s. Проекция этой оси s на плоскость σ является осью перспективы трехвершинников ABC и $A'B'C'$. Теорема доказана.

§ 2. Гармонические четверки точек

Четырехвершинником называется фигура, составленная из четырех точек плоскости, из коих никакие три не лежат на одной прямой, и шести прямых, попарно соединяющих эти точки. Стороны четырехвершинника, не имеющие общих вершин, называются *противоположными*. Точки пересечения противоположных сторон называются *диагональными точками*.



Черт. 37.



Черт. 38.

Мы будем говорить, что пара точек C, D на прямой гармонически сопряжена паре точек A, B, если существует четырехвершинник, для которого точки A и B являются диагональными, а точки C и D получаются в пересечении прямой, соединяющей A и B со сторонами, сходящимися в третьей диагональной точке (черт. 37).

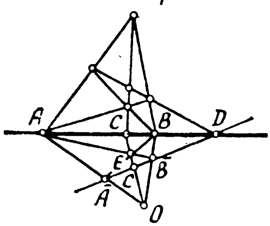
Из того, что в четырехвершиннике никакие три вершины не лежат на одной прямой, следует, что *в гармонической группе точек A, B, C, D все точки различны.*

Теорема 54. Пусть на прямой g даны три точки A, B, C. Тогда существует не более одной точки D такой, что пара C, D гармонически сопряжена A, B.

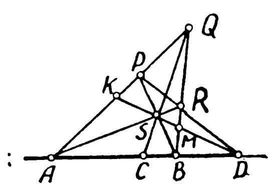
Доказательство. Допустим, существуют две такие точки D и D'. Тогда существует два четырехвершинника $PQRS$ и $P'Q'R'S'$, с помощью которых указанным выше способом получаются эти точки (черт. 38).

Прямая g является осью перспективы для трехвершинников PSQ и $P'S'Q'$, QSR и $Q'S'R'$. Отсюда по теореме Дезарга следует, что каждая из указанных пар трехвершинников имеет центр перспективы. Так как трехвершинники PSQ и QSR имеют общую пару вершин Q и S, а трехвершинники $P'S'Q'$ и $Q'S'R'$ имеют пару общих вершин Q' и S', то обе пары трехвершинников имеют общий центр перспективы O. Отсюда следует, что трехвершинники PSR и $P'S'R'$ тоже имеют центр перспективы — точку O. По теореме Дезарга эти трехвершинники имеют ось перспективы. Очевидно, она совпадает с g и, следовательно, $D \equiv D'$. Теорема доказана.

Теорема 55. *Свойство гармонической сопряженности пар точек сохраняется при проектировании.* То есть,



Черт. 39.



Черт. 40.

если точки A, B, C, D прямой g проектируются в точки $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$ прямой $\bar{g}$ из некоторой точки O, лежащей вне этих прямых, и если пара C, D гармонически сопряжена паре A, B, то пара $\bar{C}$, $\bar{D}$ сопряжена паре $\bar{A}$, $\bar{B}$.

Доказательство. Пусть сначала $C \equiv \bar{C}$ или $D \equiv \bar{D}$ (черт. 39). Проведем прямые $B\bar{A}$ и $\bar{B}A$. Они пересекутся в некоторой точке E. В силу единственности точки C прямая OC проходит через E. Пара точек $\bar{C}$, D гармонически сопряжена паре $\bar{A}$, $\bar{B}$ (соответствующий четырехвершинник $OAEB$). Общий случай сводится к этому частному путем проектирования на промежуточную прямую, соединяющую точки D и $\bar{C}$. Теорема доказана.

Теорема 56. *Свойство гармонической сопряженности пар точек взаимно. То есть, если пара C, D гармонически сопряжена паре A, B, то пара A, B гармонически сопряжена паре C, D.*

Доказательство. Пусть сопряженность пары C, D по отношению к A, B устанавливается четырехвершинником $PQRS$ (черт. 40). Очевидно, пара K, M сопряжена паре SD (четырехвершинник $APRB$). А так как при проектировании из точки Q точки K, M, S, D переходят в A, B,

C, D соответственно, то A, B гармонически сопряжена C, D. Теорема доказана.

Пусть через точку O на плоскости проходят четыре прямые a, b, c, d. Мы будем говорить, что пара прямых c, d гармонически сопряжена паре a, b, если в пересечении с какой-нибудь прямой пара точек пересечения C, D гармонически сопряжена паре точек пересечения A, B. В силу теоремы 55 свойство гармонической сопряженности для прямых не зависит от выбора секущей прямой.

Все доказанные в этом параграфе теоремы относятся к проективной геометрии на плоскости. Их доказательства также проведены без выхода из плоскости. Правда, при этом мы опирались на теорему Дезарга, доказательство которой в нашем изложении предполагает пространственные построения. Спрашивается, нельзя ли теорему Дезарга доказать, опираясь только на плоские аксиомы связи. Этот вопрос возникает в связи с построением проективной геометрии на плоскости.

Гильберт доказал, что теорема Дезарга не может быть *доказана с помощью только плоских аксиом связи.* И для построения проективной геометрии на плоскости систему плоских аксиом связи надо пополнить теоремой Дезарга как аксиомой.

§ 3. Аксиомы порядка. Афинная плоскость

Аксиомы порядка устанавливают свойства взаимного расположения точек на прямой.

Мы полагаем, что на прямой есть два взаимно противоположных направления и по отношению к каждому из них каждая тройка точек находится в известном отношении, которое выражается словом «следовать», причем выполняются аксиомы:

Аксиома II_1. *Следование тройки ABC в одном направлении исключает следование ее в противоположном направлении.*

Аксиома II_2. *Если тройка ABC следует в одном направлении, то тройки BAC и ACB следуют в противоположном направлении.*

Аксиома II_3. *Если тройки ABC и CDA следуют в одном направлении, то тройка BCD следует в том же направлении.*

Аксиома II_4. *Для каждой пары точек A и B найдутся точки C и D такие, что тройки ACB и ADB следуют в противоположных направлениях.*

Аксиома II_5. *Упорядоченность точек прямой сохраняется при проектировании.* Это значит, что если прямая g спроектирована на прямую g' и t — одно из направлений на g, то на g' можно указать такое направление t', что каждый раз, когда тройка ABC на g следует в направлении t, соответствующая ей тройка $A'B'C'$ на g' следует в направлении t'.

Из аксиомы II_2 видно, что тройки точек CAB и BCA следуют в том же направлении, что и ABC, а тройка CBA — в противоположном направлении.

Если тройки ACB и ADB следуют в противоположных направлениях, то мы будем говорить, что пара CD *разделяет* пару AB. Свойство разделения пар взаимно, т. е. если CD разделяет AB, то AB разделяет CD. Действительно, тройки ACB и BDA следуют в одном направлении, а тройки BCA и ADB в другом. По аксиоме II_3 тройки CBD и CAD следуют в противоположных направлениях, т. е. пара AB разделяет пару CD.

Пусть на прямой имеем две точки A и B. Совокупность всех точек X, для которых тройки AXB следуют в одном направлении, мы будем называть *отрезком*. Очевидно, на прямой пара точек A и B определяет два отрезка. Мы будем называть их *дополнительными*.

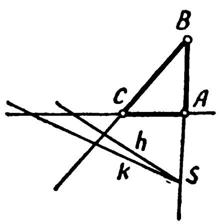
Пусть на плоскости имеем три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Фигуру, составленную из трех отрезков AB, BC и AC, мы будем называть *треугольником*, если существует прямая, пересекающая каждый из трех дополнительных отрезков. Для треугольников на проективной плоскости имеет место предложение Паша.

Теорема 57. *Если прямая g пересекает сторону AB треугольника ABC и не проходит ни через одну из его вершин, то она пересекает либо сторону AC, либо BC.*

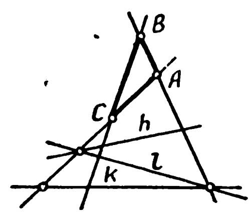
Доказательство. Обозначим $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ отрезки, дополнительные сторонам треугольника. Пусть S — точка отрезка $\overline{AB}$ и h — прямая, проходящая через эту точку, пересекающая каждый из двух других отрезков $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$. Пусть теперь k — любая прямая, проходящая через S, пересекающая $\overline{BC}$. Утверждается, что она пересекает и $\overline{CA}$.

По аксиоме II_5 проектирование из S (черт. 41) переводит отрезки прямой AC в отрезки прямой BC. Так как прямая h пересекает $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$, то при этом проектировании BC соответствует $\overline{CA}$ (а не CA). Отсюда следует, что прямая k, пересекая $\overline{BC}$, должна пересекать и $\overline{CA}$.

Теперь легко видеть, что если прямая h пересекает три отрезка $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, а прямая k — два отрезка $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, то она пересекает и третий ($\overline{CA}$). Для доказательства достаточно воспользоваться вспомогательной прямой l (черт. 42). Используя предыдущий вывод, заключаем сначала, что прямая l пересекает все три отрезка, а затем приходим к тому же выводу относительно прямой k.



Черт. 41.



Черт. 42.

Предположим теперь, что прямая g пересекает сторону AB треугольника и не пересекает ни одной из его других сторон AC и BC. Тогда она пересекает дополнительные отрезки и $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ и по доказанному должна пересекать $\overline{AB}$, что невозможно. Теорема доказана.

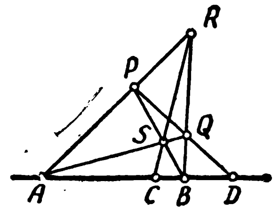
Пусть g — прямая, t и $\bar{t}$ — два противоположных направления на этой прямой. Фиксируем какую-нибудь точку A на прямой и установим отношение порядка для каждой пары точек, отличных от A следующим образом. Мы будем говорить, что B предшествует C в направлении t $(\bar{t})$, если тройка ABC следует в направлении t $(\bar{t})$.

Тривиальным образом проверяется, что *определяемое таким образом отношение порядка для точек разрезанной (в точке A) прямой удовлетворяет всем линейным аксиомам порядка эвклидовой геометрии.*

Теорема 58. *Если пары точек AB и CD на прямой гармонически сопряжены, то ABC и ABD следуют в противоположных направлениях.*

Два проектирования, выполненные одно за другим — прямой AB на прямую PQ из точки R, а затем прямой PQ на прямую AB из точки S, оставляют точки C и D неподвижными, а точки A и B переставляют местами (черт. 43). Это значит, что если обозначить H результат двойного проектирования, то $HA = B$, $HB = A$, $HC = C$, $HD = D$.

Фиксируем точку C на прямой и введем отношение следования для пар точек прямой, разрезанной в C, как указано выше. Тогда утверждение теоремы состоит в том, что D находится между A и B. Допустим, это неверно. Тогда в одном из двух направлений $A < D$ и $B < D$. Отсюда $HA < HD$ и по аксиоме I_5 точки A, B и точки HA, HB должны находиться в одинаковых отношениях, т. е. либо $A<B$, $HA<HB$, либо $B < A$, $HB < HA$. Но ни то ни другое невозможно, так как $HA = B$, а $HB = A$. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.



Черт. 43.

Фиксируем теперь на плоскости α какую-нибудь прямую g_∞. Назовем эту прямую *бесконечно удаленной*, а ее точки бесконечно удаленными точками. Плоскость α, разрезанную по прямой g_∞, мы будем называть *афинной плоскостью*.

Легко убедиться, что *на афинной плоскости выполняются плоские аксиомы связи эвклидовой геометрии.*

Как было указано выше, для точек прямых афинной плоскости выполняются линейные аксиомы порядка эвклидовой геометрии. Покажем, что плоская аксиома порядка тоже выполняется.

Теорема 59. *Прямая g разбивает афинную плоскость на две полуплоскости так, что если X и Y — точки одной полуплоскости, то отрезок XY не пересекает g, если же X и Y принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок XY пересекает g.*

Пусть A — точка плоскости, не лежащая на прямой g. Отнесем к первой полуплоскости точку A и все точки X такие, что AX не пересекает g. А ко второй полуплоскости отнесем такие точки X, для которых отрезок AX пересекает g.

Пусть X и Y — две точки первой полуплоскости; покажем, что отрезок XY не пересекает g. Утверждение очевидно, если одна из точек совпадает с A. Дальше рассматриваем два случая: 1) точки A, X, Y не лежат на одной прямой, 2) точки A, X, Y лежат на прямой. В первом случае, так как AX и AY не пересекают g, по теореме 57 XY не пересекает g.

Рассмотрим второй случай. Допустим, отрезок XY пересекает прямую в некоторой точке C. Тогда, если A лежит между X и Y, то C принадлежит либо AX, либо AY (теорема 7). Если X лежит между A и Y, то C принадлежит AY. Наконец, если Y лежит между A и X, то C принадлежит AX (теорема 6). И во всех случаях получается противоречие, ибо отрезки AX и AY не пересекают g.

Доказательство того, что отрезок XY пересекает прямую g, если точки X и Y принадлежат разным полуплоскостям, аналогично.

Таким образом, *на афинной плоскости выполняются все аксиомы порядка эвклидовой геометрии.*

Так как на афинной плоскости выполняются аксиомы связи и аксиомы порядка геометрии Эвклида, то на ней имеют место и все следствия, вытекающие из этих аксиом.

Будем называть две прямые афинной плоскости *параллельными*, если они не пересекаются. Это значит, что соответствующие им прямые проективной плоскости пересекаются в бесконечно удаленной точке.

Параллельные прямые обладают следующим очевидным свойством. *Если прямые a, b параллельны и прямые b, c параллельны, то прямые a, c параллельны.*

Легко видеть, что *для прямых на афинной плоскости выполняется аксиома параллельности эвклидовой геометрии.*

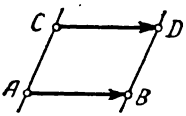
§ 4. Векторы на афинной плоскости

Вектором в афинной плоскости мы будем называть направленный отрезок AB. Точку A будем называть началом вектора, а точку B — концом. Для векторов, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, мы определяем понятие *равенства* следующим образом.

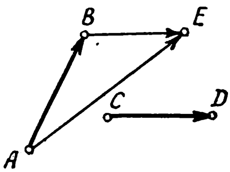
Если векторы AB и CD лежат на параллельных прямых, то мы считаем их равными в том случае, если прямые AC и BD параллельны. Если же векторы AB и CD лежат на одной прямой, то мы считаем их равными, если существует вектор, параллельный им обоим и равный каждому из них (черт. 44).

Пусть AB — вектор и C — точка, лежащая вне прямой, тогда существует вектор CD, равный AB. Действительно, прямая, проходящая через C, параллельная AB, и прямая, параллельная AC, проходящая через B, пересекаются по аксиоме параллельности в некоторой точке D. Очевидно, векторы AB и CD равны.

Равенство векторов обладает свойством транзитивности, именно, если $AB = CD$ и $AB = EF$, то $CD = EF$. В случае, если векторы лежат на различных параллель-



Черт. 44.



Черт. 45.

ных прямых и точки A, C, E не лежат на одной прямой, оно следует из теоремы Дезарга в применении к трехвершинникам ACE и BDF, которые расположены перспективно относительно бесконечно удаленной точки. Если же A, C, E лежат на одной прямой, то указанное свойство следует из аксиомы параллельности. Общий случай сводится к рассмотренному частному случаю путем введения равных вспомогательных векторов описанной выше конструкцией.

Если векторы AB и AE равны, то они совпадают, т. е. $B \equiv E$. Действительно, на прямой, параллельной AB, существует вектор CD, равный AB, а следовательно, и AE. Совпадение точек A и E следует из единственности прямой, параллельной AC, проходящей через точку B.

Вектор вполне характеризуется своим началом и концом. Поэтому его можно было бы определить так же, как пару точек, взятых в определенном порядке, именуемых началом и концом вектора. В связи с определением операций сложения и вычитания для векторов целесообразно пару совпадающих точек считать также вектором. Этот вектор мы называем *нулевым*. Все нулевые векторы равны по определению.

Суммой векторов AB и CD $(AB + CD)$ мы будем называть вектор AE, конец которого E определяется условием $BE = CD$ (черт. 45).

Сложение векторов обладает следующими свойствами:

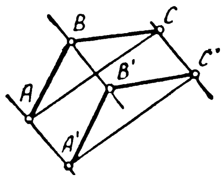
1) *Если* $a = a'$ и $b = b'$, *то* $a + b = a' + b'$.

2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (*ассоциативность*).

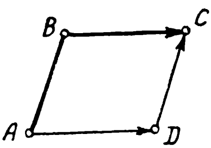
3) $a + b = b + a$ (*коммутативность*).

Докажем эти свойства.

Пусть $CD = C'D'$. Покажем, что $AB + CD = AB + C'D'$. По определению $AB + CD$ есть вектор AX, причем точка X определяется условием $BX = CD$. Аналогично, $AB + C'D'$ есть вектор AY, причем $BY = C'D'$.



Черт. 46.



Черт. 47.

Для того чтобы доказать первое свойство, достаточно показать, что если $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, то $AC = A'C'$. Если прямые AB, $A'B'$ различны и прямые BC $B'C'$ тоже различны, то прямые AA' и BB', а также BB' и CC' параллельны. Отсюда параллельность AA', CC' и, следовательно, равенство $AC = A'C'$ (черт. 46). В общем случае мы берем точку Y, не лежащую ни на одной из прямых AB, $A'B'$, BC, $B'C'$, и строим точки X и Z так, чтобы $XY = AB$, $YZ = BC$. Тогда по доказанному $AC = XZ$, $A'C' = XZ$. Следовательно, $AC = A'C'$.

В силу свойства 1) ассоциативность сложения достаточно доказать для векторов AB, BC и CD. А для таких векторов ассоциативность очевидна.

В силу свойства 1) коммутативность достаточно установить для векторов AB и BC. Если векторы не лежат на одной прямой, то построим точку D (черт. 47). Тогда

$$AB + BC = AC = AD + DC = BC + AB.$$

Пусть теперь точки A, B, C лежат на одной прямой (черт. 48). Возьмем вне этой прямой точку E. Тогда по доказанному

$$EC = EB + BC = BC + EB,\ AE = AB + BE = BE + AB,$$

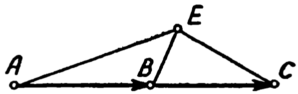
$$AC = AE + EC = EC + AE.$$

Отсюда

$$AB + BC = BC + AB.$$

Пусть AB — вектор, отличный от нуля. Тогда на отрезке AB найдется такая точка C, что $AC = CB$.

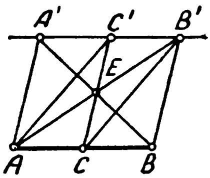
Действительно, построим точку C, гармонически сопряженную бесконечно удаленной точке прямой AB относительно точек A, B (черт. 49). Очевидно, $CB = C'B'$. Далее, трехвершинники $AA'C'$ и $B'BC$ находятся в перспективном расположении относительно точки E. Отсюда следует, что прямые AC' и CB' параллельны, а следовательно, $AC = C'B'$. Так как, кроме того, $CB = C'B'$, то, $AC = CB$. Утверждение доказано.



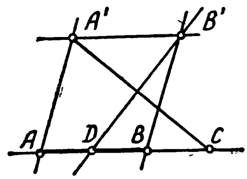
Черт. 48.

Определим вычитание векторов. *Разностью* векторов AB и CD $(AB - CD)$ мы называем сумму векторов AB и DC. Очевидно, $(AB - CD) + CD = AB$, $AB - AB = 0$. В дальнейшем, если $a = AB$ — данный вектор, то $-a$ будет обозначать вектор BA. Этот вектор мы будем называть *противоположным* вектору AB.

Введем теперь понятие одинаково направленных векторов. Два отличных от нуля вектора AB и CD, лежащие на одной прямой, мы будем называть *одинаково направленными*, если $A < B$ и $C < D$ или $A > B$ и $C > D$.



Черт. 49.



Черт. 50.

Очевидно, *свойство векторов быть одинаково направленными транзитивно*, т. е. если a и b одинаково направлены и b и c одинаково направлены, то a и c одинаково направлены.

Равные векторы AB и CD одинаково направлены.

Действительно, так как векторы AB и CD равны, то существует параллельный вектор $A'B'$, равный им обоим (черт. 50). Пусть для определенности $A < B$. Тогда, если утверждение неверно, то $C > D$. Прямая AB разбивается точкой A на две полупрямые h_1 и h_2. Пусть h_1 — та полупрямая, которой принадлежит точка B.

Точка C не может совпадать с A, так как тогда D совпадает с B и, следовательно, $C < D$. Пусть C и D принадлежат h_1. Тогда $A < D < C$. Прямая $B'D$ не может пересекать отрезок $A'A$, так как тогда пересекается отрезок $B'D$ с прямой AA', что невозможно, ибо точки B' и D расположены по одну сторону этой прямой. Прямые $A'C$ и $B'D$ не пересекаются, как параллельные. Итак, прямая $B'D$ пересекает только одну сторону (AC) треугольника $AA'C$, что противоречит предложению Паша.

Пусть D совпадает с A. Тогда полупрямая $A'C$ проходит внутри угла $AA'B'$ и, следовательно, пересекает отрезок DB', что невозможно.

Случай, когда точка D принадлежит h_2, а также когда обе точки C и D принадлежат h_2, рассматривается аналогично.

Два параллельных вектора мы будем называть *одинаково направленными*, если равные им векторы на одной прямой одинаково направлены. Свойство векторов быть одинаково направленными не зависит от прямой, на которой берутся равные векторы. Очевидно, достаточно показать, что если векторы AB и BC одинаково направлены и $A'B'$, $B'C'$ соответственно равные им векторы на параллельной прямой, то $A'B'$ и $B'C'$ одинаково направлены.

Прямые AA', BB', CC' параллельны из-за равенства соответствующих векторов. А так как проектирование сохраняет порядок точек, то из того, что B находится между A и C, следует, что B' находится между A' и C'. Утверждение доказано.

Для одинаково направленных векторов мы определяем отношение «*больше*» и «*меньше*». Именно, мы будем говорить, что $CD < AB$, если на отрезке AB есть такая точка X, что $AX = CD$.

Если векторы a, b, a', b' *одинаково направлены и* $a < b$, $a = a'$ $b = b'$, *то* $a' < b'$. Это непосредственно следует из того, что равные векторы имеют одинаковые направления.

Очевидно, если a и b одинаково направленные векторы, то $a < a + b$. Отсюда легко выводится, что *если* $a < b$ *и* $c < d$, *то* $a + c < b + d$.

§ 5. Аксиома непрерывности. Умножение вектора на число

Как показано в § 2, если удалить из проективной прямой какую-нибудь точку, то для остальных точек прямой естественным образом устанавливается отношение следования для каждой пары точек, удовлетворяющее аксиомам порядка эвклидовой геометрии.

Аксиома III. *Требуется, чтобы для афинной прямой, которая получается из проективной прямой при удалении какой-нибудь из ее точек, имела место аксиома непрерывности Дедекинда.*

Как показано в предыдущем параграфе, векторы одного направления обладают всеми свойствами эвклидовых отрезков, которые были нами использованы при установлении меры длины. Отсюда мы заключаем, что имеет место следующая теорема.

Существует и притом единственная функция μ, определенная на всех векторах данного направления, удовлетворяющая условиям:

1) *Для любого вектора a, отличного от нуля,* $\mu(a) > 0$.

2) *Если $a = b$, то $\mu(a) = \mu(b)$.*

3) *Если $c = a + b$, то $\mu(c) = \mu(a) + \mu(b)$.*

4) *Для некоторого вектора a_0 $\mu(a_0) = 1$.*

На основании этой теоремы легко доказывается следующая теорема.

Теорема 60. *Существует и притом единственная функция λ, определенная на всех векторах данной прямой и параллельных ей, удовлетворяющая условиям:*

1) *Для векторов одного направления $\lambda > 0$, а для векторов противоположного направления $\lambda < 0$.*

2) *Для нулевого вектора $\lambda = 0$.*

3) *Если $a = b$, то $\lambda(a) = \lambda(b)$.*

4) *Если $c = a + b$,* то $\lambda(c) = \lambda(a) + \lambda(b)$.

5) *Для некоторого отличного от нуля вектора a_0* $\lambda(a_0) = 1$, $\lambda(-a_0) = -1$.

Доказательство. Единственность функции непосредственно следует из предыдущей теоремы, так как эта функция указанными условиями однозначно определяется на векторах данного направления и на векторах противоположного направления. Докажем существование функции λ.

Положим на векторах направления a_0 $\lambda(a) = \mu(a)$, а на векторах противоположного направления $\lambda(a) = -\mu(-a)$. Условия 1, 2, 3 и 5 очевидным образом выполняются. Проверим условие 4.

Если a и b одного направления, то, очевидно, $\lambda(a+b) = \lambda(a) + \lambda(b)$ по соответствующему свойству функции μ. Пусть векторы a и b противоположно направлены. Тогда один из них имеет направление a_0, например a. Если $-b < a$, то $\mu(a) = \mu(-b) + \mu(a+b)$. Откуда $\lambda(a) = -\lambda(b) + \lambda(a+b)$ и, следовательно, $\lambda(a+b) = \lambda(a) + \lambda(b)$. Если $-b > a$, то $\mu(-b) = \mu(a) + \mu(-b-a)$, откуда $-\lambda(b) = \lambda(a) - \lambda(a+b)$ и, следовательно, $\lambda(a+b) = \lambda(a) + \lambda(b)$. Теорема доказана.

Функция λ зависит от выбора единичного вектора a_0. Пусть вместо a_0 взят некоторый вектор a_0', и λ' соответствующая ему функция. Рассмотрим функцию $\lambda(a_0)\lambda'(x)/\lambda'(a_c')$. Легко видеть, что она удовлетворяет всем условиям теоремы 60. Следовательно, она равна $\lambda(x)$. Таким образом, *функции* λ, *соответствующие различным единичным векторам, отличаются только множителем.*

Из свойств функции λ легко следует, что *если для двух векторов* x *и* y $\lambda(x) = \lambda(y)$, *то* $x = y$.

Произведением вектора a на число α мы будем называть такой вектор αa той же прямой или параллельной, что $\lambda(\alpha a) = \alpha\lambda(a)$. Очевидно, это определение не зависит от единичного вектора, который определяет функцию λ.

Пусть a и b — параллельные векторы. Тогда существует такое число α, что $\alpha a = b$. В самом деле, взяв $\alpha = \lambda(b)/\lambda(a)$, будем иметь $\lambda(\alpha a) = \lambda(b)$, откуда $\alpha a = b$.

Покажем, что $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$. Действительно, значения функции λ для векторов $(\alpha+\beta)a$ и $\alpha a + \beta a$ одинаковы. Следовательно, векторы равны.

Аналогично показывается, что $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$.

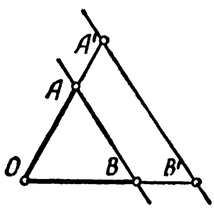
Докажем теперь, что

$$\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b.$$

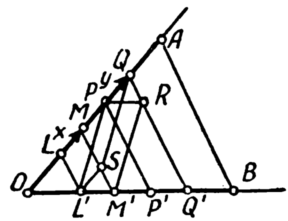
Утверждение очевидно, если один из векторов или оба равны нулю. Если векторы параллельны, то b выражается через a $b = \beta a$ и обе части равенства в силу указанных выше свойств равны $\alpha(1+\beta)a$.

Пусть теперь a и b — отличные от нуля, не параллельные векторы. Мы можем считать, что они имеют общее начало O, а концы их A и B соответственно (черт. 51). Пусть A' и B' — концы векторов αa и αb. Покажем, что прямые AB и $A'B'$ параллельны.

Рассмотрим проектирование прямой OA на прямую OB пучком прямых, параллельных AB. Оно сопоставляет каждому вектору x прямой OA некоторый вектор Hx прямой OB. Утверждаем, что *если* $x = y$, *то* $Hx = Hy$, *для любых векторов* x *и* y $H(x + y) = Hx + Hy$.



Черт. 51.



Черт. 52.

Покажем сначала, что если $x = y$, то $Hx = Hy$ (черт. 52). Так как проектирование сохраняет порядок следования точек, то Hx и Hy одинаково направлены. Предположим, что точки L и P начала векторов x и y отличны от O. Проведем через точку P прямую PR, параллельную OB; а через точку L' прямую $L'S$, параллельную OA. Для того чтобы установить равенство $Hx = Hy$, достаточно показать, что прямые PL' и RM' параллельны.

Треугольники PQR и $L'SM'$ перспективно расположены относительно бесконечно удаленной прямой. А так как $x = y$ и, следовательно, $PL' \parallel SQ$, то $PL' \parallel RM'$. Значит, $Hx = Hy$. Если L или P совпадает с O, то вместо OB в этом рассуждении надо сначала взять параллельную OB прямую, чтобы она не проходила через L и P.

Теперь свойство $H(x + y) = Hx + Hy$ достаточно доказать для векторов $x = PQ$ и $y = QR$. А для таких векторов оно очевидно.

Пусть λ_1 — функция на векторах прямой OA, λ_2 — функция на векторах прямой OB и λ_3 — функция на векторах прямой AB, причем $\lambda_1(a) = 1$, $\lambda_2(b) = 1$, $\lambda_3(a - b) = 1$. Определим функцию ν на векторах прямой

OA условием $\nu(x) = \lambda_2(Hx)$. Эта функция удовлетворяет условиям 1, 2, 3 и 4 теоремы 60. Следовательно, $\nu(x) = k\lambda_1(x)$. Откуда

$$\frac{\lambda_2(Hx)}{\lambda_1(x)} = \frac{\lambda_2(Hy)}{\lambda_1(y)}.$$

Наша цель была доказать параллельность прямых AB и $A'B'$, где A' и B' — концы векторов αa и αb с общим началом O. Для того чтобы это доказать, достаточно установить равенство $H(\alpha a) = \alpha b$. А это теперь нетрудно. В самом деле, полагая в полученной выше пропорции $x = a$, $y = \alpha a$ и замечая, что $\lambda_1(a) = 1$, $\lambda_2(b) = 1$, получим $\lambda_2(H\alpha a) = \alpha$. Но $\lambda_2(\alpha b) = \alpha$. Отсюда следует, что $H(\alpha a) = \alpha b$. И параллельность прямых AB и $A'B'$ доказана.

Аналогичное рассуждение можно провести относительно проектирования S прямой OA на прямую $A'B'$ (черт. 53). Тогда получим аналогичную пропорцию

$$\frac{\lambda_3(Sx)}{\lambda_1(x)} = \frac{\lambda_3(Sy)}{\lambda_1(y)}.$$

Полагая $x = a$, $y = \alpha a$ и замечая, что $AB = A''B'$ из-за параллельности AB и $A'B'$, получим

$$\alpha\lambda_3(a - b) = \lambda_3(\alpha a - \alpha b).$$

А отсюда

$$\alpha(a - b) = \alpha a - \alpha b.$$

Если теперь взять вместо вектора b вектор $-b$, то получим

$$\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b.$$

Утверждение доказано.

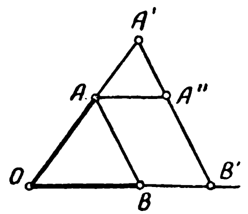
Пусть a и b — отличные от нуля, не параллельные векторы. Тогда любой вектор c допускает и притом единственное представление вида

$$c = \alpha a + \beta b.$$

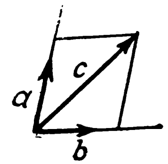
Допустим, вектор c допускает другое представление $c = \alpha' a + \beta' b$. Тогда, вычитая равенства почленно, получим $(\alpha - \alpha')a + (\beta - \beta')b = 0$. Если $\alpha = \alpha'$, то $(\alpha - \alpha')a$ — нулевой вектор, следовательно, $(\beta - \beta')b$ — нулевой вектор. Отсюда $\beta = \beta'$. И разложения совпадают. Аналогично при $\beta = \beta'$. Остается предположить, что $\alpha \neq \alpha'$,

$\beta \neq \beta'$. Но тогда векторы $(\alpha - \alpha')a$ и $(\beta - \beta')b$, будучи отличны от нуля и не параллельны, не могут давать сумму, равную нулю. Единственность доказана.

Докажем существование разложения $c = \alpha a + \beta b$. Можно считать, что векторы a, b, c имеют общее начало O. Спроектируем вектор c прямыми параллельными b на прямую, содержащую вектор a, и прямыми, параллельными a на прямую, содержащую вектор b



Черт. 53.



Черт. 53a.

(черт. 53a). Проекции обозначим c_a и c_b соответственно. Очевидно, $c = c_a + c_b$. Так как c_a лежит на прямой вектора a, то $c_a = \alpha a$, аналогично $c_b = \beta b$. Следовательно,

$$c = \alpha a + \beta b.$$

Существование разложения доказано.

В заключение заметим, что подобную теорию векторов можно было бы построить и в пространстве. Мы ограничились случаем плоскости, чтобы упростить изложение.

§ 6. Декартовы и проективные координаты

Проведем через произвольную точку O *(начало координат)* афинной плоскости две прямые *(оси координат)* и возьмем на каждой из них по одному вектору e_1 и e_2 *(базисные векторы)*. Тогда любой вектор OA допускает и притом единственное представление

$$OA = xe_1 + ye_2.$$

Таким образом, каждой точке A афинной плоскости взаимно однозначно сопоставляется пара чисел (x, y). Числа x, y называются *декартовыми координатами* точки.

Пусть g — прямая, A_0 — точка, а e — отличный от нуля вектор на этой прямой. Возьмем произвольную точку A на прямой. Так как векторы $A_0A = OA - OA_0$ и e лежат на одной прямой, то

$$OA - OA_0 = \lambda e.$$

Представляя e в форме $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, получим

$$(x - x_0) e_1 + (y - y_0) e_2 = \alpha_1 \lambda_1 e_1 + \alpha_2 \lambda_2 e_2.$$

Отсюда в силу единственности разложения любого вектора по векторам базиса e_1 и e_2 заключаем

$$x - x_0 = \alpha_1 \lambda, \quad y - y_0 = \alpha_2 \lambda.$$

Умножив первое уравнение на α_2, второе на α_1 и вычтем почленно. Тогда получим

$$(x - x_0)\alpha_2 - (y - y_0)\alpha_1 = 0.$$

Таким образом, координаты каждой точки прямой g удовлетворяют линейному уравнению. Это уравнение называется *уравнением прямой.*

Обратно, *каждое линейное уравнение*

$$ax + by + c = 0 \qquad (*)$$

является уравнением некоторой прямой. Действительно, пусть x_0, y_0 — какое-нибудь решение этого уравнения. Тогда прямая, проходящая через точку (x_0, y_0) и содержащая вектор $e = -be_1 + ae_2$, имеет уравнение (*).

Выясним, как выражается отношение следования для точек на прямой через их координаты. Пусть в уравнении прямой (*) $b \neq 0$. Это значит, что в разложении вектора e, лежащего на прямой, $\alpha_1 \neq 0$.

Как мы знаем, в одном направлении следование точки A_2 за A_1 выражается в том, что вектор A_1A_2 одинаково направлен с некоторым фиксированным вектором на прямой, например e, а следование в другом направлении выражается в том, что эти векторы противоположно направлены.

Так как

$OA_1 - OA_0 = \lambda_1 e$, $\quad OA_2 - OA_0 = \lambda_2 e$, то $A_1A_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)e$.

Отсюда следует, что $A_1 < A_2$ в одном направлении, если $\lambda_1 < \lambda_2$, а в другом направлении, если $\lambda_1 > \lambda_2$. Так как $x_1 - x_0 = \alpha_1\lambda_1$, $\quad x_2 - x_0 = \alpha_1\lambda_2$, $\quad$ то $\quad x_2 - x_1 = \alpha_1(\lambda_2 - \lambda_1)$.

Следовательно, $A_1 < A_2$ в одном направлении, если $x_1 < x_2$, а другом направлении, если $x_1 > x_2$.

Аналогично показывается, что если в уравнении прямой (*) $b = 0$, то следование на прямой в одном направлении выражается неравенством $y_1 < y_2$, а в другом — $y_1 > y_2$.

Введем на афинной плоскости однородные координаты. *Однородными координатами* точки мы будем называть любые три числа x_1, x_2, x_3, не все равные нулю, связанные с ее декартовыми координатами x, y, равенствами

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Однородные координаты сопоставляются точке не однозначно. И говоря об однородных координатах точки, мы имеем в виду не определенную тройку чисел, а систему троек, отличающихся друг от друга некоторым множителем. Очевидно, координата $x_3 \neq 0$.

Подставляя в уравнение прямой (*) x и y, выраженные через однородные координаты, заключаем, что однородные координаты прямой удовлетворяют линейному однородному уравнению

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

Легко видеть, что и обратно всякое такое уравнение, если a и b не равны нулю, одновременно есть уравнение некоторой прямой афинной плоскости.

Введем теперь *проективные координаты* на проективной плоскости. Если точка A проективной плоскости является точкой афинной плоскости, то в качестве проективных координат мы берем однородные координаты. Если точка A является бесконечно удаленной точкой прямой, содержащей афинную прямую $ax + by + c = 0$, то в качестве проективных координат мы берем тройку чисел $(-b, a, 0)$ или любую тройку, ей пропорциональную.

Заметим, что через каждую бесконечно удаленную точку проективной плоскости проходит бесчисленное множество проективных прямых, содержащих прямые афинные. Поэтому для корректности введения координат бесконечно удаленных точек надо, чтобы тройки, отвечающие одной бесконечно удаленной точке, определяемые разными прямыми $ax + by + c = 0$ и $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, были пропорциональны. Это так и есть, ибо система уравнений

$$ax + by + c = 0, \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

не совместна (прямые параллельны, т. е. не пересекаются). Отсюда

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{следовательно,} \ \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}.$$

Очевидно, *проективная прямая в проективных координатах задается линейным уравнением*, именно тем же уравнением, что и соответствующая афинная прямая в однородных координатах. Бесконечно удаленная прямая задается уравнением $x_3 = 0$. Обратно, *любое линейное однородное уравнение в проективных координатах является уравнением некоторой прямой.*

В заключение заметим, что в проективном пространстве тоже можно ввести проективные координаты x_1, x_2, x_3, x_4. При этом любая плоскость будет задаваться линейным однородным уравнением

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0,$$

а любая прямая — системой двух таких независимых уравнений. Мы ограничились случаем проективной плоскости, чтобы упростить изложение.

§ 7. Непротиворечивость и полнота системы аксиом проективной геометрии на плоскости

Теорема 61. *Система аксиом проективной геометрии непротиворечива. То есть, из нее не могут быть выведены путем логических рассуждений два взаимно исключающих следствия.*

Эту теорему мы докажем для проективной геометрии на плоскости. Доказательство будет состоять в том, что мы построим конкретную реализацию системы аксиом проективной геометрии, в которой аксиомы будут выполняться в силу соответствующих теорем арифметики. Эту реализацию мы будем называть аналитической.

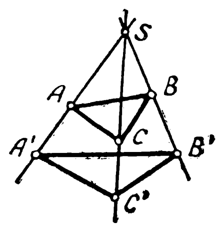
Точкой мы будем называть любую тройку вещественных чисел (x_1, x_2, x_3), не равных нулю одновременно, и будем считать точки совпадающими, если тройки пропорциональны. Числа x_1, x_2, x_3 будем называть координатами точки.

Прямой мы будем называть совокупность точек, удовлетворяющих линейному однородному уравнению

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

Мы будем говорить, что точка *принадлежит* прямой, если она является одной из ее точек, т. е. координаты точки удовлетворяют уравнению прямой.

Проверка плоских аксиом связи не составляет труда. Мы предоставляем ее читателю.



Черт. 54.

Как было отмечено ранее, теорема Дезарга не может быть выведена из плоских аксиом связи. И для построения проективной геометрии на плоскости предложение Дезарга надо принять как аксиому. Проверим ее в нашей реализации.

Как мы знаем, в случае, когда у трехвершинников совпадают две соответствующие вершины или стороны, предложение Дезарга выполняется тривиальным образом. Поэтому мы будем считать, что соответствующие стороны и вершины трехвершинников различны.

Пусть трехвершинники имеют центр перспективы S (черт. 54). Обозначим $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ и $\delta = 0$ уравнения прямых AS, BS, AB и $A'B'$ соответственно. Тогда уравнение SC можно представить в виде $\lambda\alpha + \mu\beta = 0$. Или, включая множители λ и μ в уравнения $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, получим уравнение прямой SC в виде

$$\alpha + \beta = 0.$$

Уравнения прямых AC и BC можно представить в виде $\alpha + \lambda\gamma = 0$, $\beta + \mu\gamma = 0$ соответственно. А так как эти прямые пересекаются с прямой SC в точке C, то найдутся такие ξ и η, что

$$\xi(\alpha + \lambda\gamma) + \eta(\beta + \mu\gamma) \equiv \alpha + \beta.$$

Отсюда в силу независимости уравнений $\alpha = 0$, $\beta = 0$ и

$\gamma = 0$ получается $\xi = \eta = 1$, $\lambda = -\mu$. Таким образом, уравнения прямых AC и BC будут

$$\alpha + \lambda\gamma = 0, \ \beta - \lambda\gamma = 0.$$

Аналогично получаются уравнения прямых $A'C'$ и $B'C'$

$$\alpha + \mu\delta = 0, \ \beta - \mu\delta = 0.$$

Очевидно, каждая из трех пар прямых $\gamma = 0$ и $\delta = 0$, $\alpha + \lambda\gamma = 0$ и $\alpha + \mu\delta = 0$, $\beta - \lambda\gamma = 0$ и $\beta - \mu\delta = 0$ пересекаются на прямой $\lambda\gamma - \mu\delta = 0$, которая и будет осью перспективы.

Доказательство обратного утверждения теоремы Дезарга проведем от противного. Пусть трехвершинники имеют ось перспективы s, и A^* — точка на ней, где пересекаются стороны BC и $B'C'$. Обозначим пересечение прямых AA' и BB' через S. Пусть C'' — точка, в которой прямая SC пересекает $A'C'$.

По доказанному трехвершинники ABC и $A'B'C''$ имеют ось перспективы. Очевидно, она совпадет с s. Таким образом, прямые BC и $B'C'$ и прямые BC, $B'C''$ пересекаются на s и притом в одной и той же точке A^*. Отсюда совпадение прямых $B'C'$ и $B'C''$ и, следовательно, совпадение точек C' и C''. Утверждение доказано.

Определим теперь отношение следования троек точек на прямой и проверим выполнимость аксиом порядка.

Назовем прямую $x_3 = 0$ бесконечно удаленной, а ее точки — бесконечно удаленными. В множестве конечных точек прямой может быть введено отношение следования пар точек так, что выполняются все аксиомы порядка эвклидовой геометрии. Для этого надо ввести отношение следования, как в декартовой реализации эвклидовой геометрии. Теперь в терминах отношений порядка для следования пар точек мы определяем следование троек.

Если все точки A, B, C конечны, то следование в одном направлении определяется одним из трех условий:

$$A < B < C, \quad \text{или } B < C < A, \quad \text{или} \quad C < A < B.$$

Следование тройки в противоположном направлении определяется условиями

$$A > B > C, \quad \text{или} \quad B > C > A, \quad \text{или} \quad C > A > B.$$

Определим следование тройки при наличии в ней одной бесконечно удаленной точки, которую обозначим

Ω. Мы будем говорить, что тройка $AB\Omega$ следует в первом из указанных направлений, если $A < B$, и во втором, если $B < A$. Тройка $A\Omega C$ следует в первом направлении, если $A > C$, и во втором, если $A < C$. Тройка ΩBC следует в первом направлении, если $B < C$, и во втором, если $B > C$.

Таким образом, мы определили следование троек точек на каждой прямой, не являющейся бесконечно удаленной. Следование троек на бесконечно удаленной прямой мы определяем через проектирование на какую-нибудь конечную прямую.

Теперь надо проверить выполнимость аксиом порядка. Эта проверка, как легко убедиться, не представляет труда, но связана с рассмотрением множества различных случаев. Поэтому мы ее проводить не будем. Что касается аксиомы непрерывности, то она, очевидно, выполняется, так как сводится к аксиоме непрерывности для эвклидовой прямой относительно следования пар.

Построив аналитическую реализацию системы аксиом проективной геометрии, мы и заключаем о ее непротиворечивости.

Перейдем теперь к вопросу о полноте системы аксиом проективной геометрии на плоскости.

Согласно общей схеме доказательства полноты системы аксиом, мы должны установить изоморфизм всех реализаций системы аксиом проективной геометрии. Для этого достаточно установить изоморфизм их какой-нибудь одной реализации, например аналитической, построенной только что.

В § 6 без каких-либо предположений о конкретности реализации мы сопоставили каждой точке систему троек чисел — проективных координат, а каждой прямой — множество троек, удовлетворяющих линейному однородному уравнению. Так было установлено взаимно однозначное соответствие между элементами произвольной реализации и аналитической. Для того чтобы это отображение было изоморфизмом, надо чтобы соответствующие группы элементов находились в одинаковых отношениях порядка.

Так ли это? Чтобы убедиться в том, что это действительно так, заметим прежде всего, что отношения следования пар точек на прямых в обоих реализациях, после удаления бесконечно удаленных точек, находятся в соответствии. И поэтому остается только показать, что установление порядка следования троек в аналитической реализации формально совпадает с восстановлением порядка следования троек на проективной прямой через порядок следования пар точек на афинной прямой.

Пусть t' и t'' — два противоположных направления на проективной прямой в какой-либо реализации. Фиксировав некоторую прямую, которую мы назвали бесконечно удаленной, мы разрезали плоскость по этой прямой и, таким образом, получили афинную плоскость и на ней афинные прямые. На афинных прямых мы определили порядок следования пар условием: $A < B$ в одном направлении (t'), если тройка ΩAB следует в направлении t', и $A > B$, если ΩAB следует в направлении t''.

Пусть теперь мы имеем три точки на афинной прямой A, B, C, причем $A < B < C$. Это значит, что тройки ΩAB и ΩBC следуют в направлении t'. По аксиоме II_2 и II_3 отсюда вытекает, что тройка ABC следует в направлении t'. То же будет при $B < C < A$ и $C < A < B$. Следовательно, установление порядка следования троек в аналитической реализации есть просто восстановление следования троек проективной прямой через отношение следования для пар точек на афинной прямой. И так как на афинных прямых соответствующие пары точек произвольной реализации и реализации аналитической находятся в одинаковых отношениях порядка, то и соответствующие тройки проективных прямых этих реализаций тоже находятся в одинаковых отношениях порядка. Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 62. *Система аксиом проективной геометрии на плоскости полна. Все ее реализации изоморфны.*

§ 8. Проективные преобразования

Проективным преобразованием плоскости называется такое ее одно-однозначное отображение на себя, при котором прямые переходят в прямые. Легко привести пример проективного преобразования. Именно, сопоставим каждой точке A с проективными координатами x_1, x_2, x_3

точку A' с проективными координатами x_1', x_2', x_3' согласно формулам

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (*)$$

Это преобразование является проективным.

Действительно, если формулы (*) разрешить относительно x_1, x_2, x_3, а это возможно, так как определитель системы $\Delta \neq 0$, то мы получим формулы вида

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}'x_1' + a_{21}'x_2' + a_{13}'x_3', \\ x_2 &= a_{21}'x_1' + a_{22}'x_2' + a_{23}''x_3', \\ x_3 &= a_{31}'x_1' + a_{32}'x_2' + a_{33}'x_3'. \end{aligned} \qquad (**)$$

Отсюда следует, что если точки A удовлетворяют линейному уравнению $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, то соответствующие им точки A^1 удовлетворяют тоже линейному уравнению, которое получается из $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ заменой в нем x_1, x_2, x_3 согласно формулам (**). Таким образом, указанное преобразование плоскости действительно является проективным.

Теорема 63. *Каковы бы ни были четыре точки A^1, A^2, A^3, A^4, по три не лежащие на одной прямой, и четыре точки B^1, B^2, B^3, B^4, тоже по три не лежащие на одной прямой, существует проективное преобразование, которое переводит точки A^1, A^2, A^3, A^4 соответственно в B^1, B^2, B^3, B^4.*

Такое преобразование можно указать среди проективных преобразований (*).

Рассмотрим две матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x_1^1 x_2^1 x_3^1 \\ x_1^2 x_2^2 x_3^2 \\ x_1^3 x_2^3 x_3^3 \\ x_1^4 x_2^4 x_3^4 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1^1 y_2^1 y_3^1 \\ y_1^2 y_2^2 y_3^2 \\ y_1^3 y_2^3 y_3^3 \\ y_1^4 y_2^4 y_3^4 \end{pmatrix},$$

составленные из координат x_α^i точек A^i и координат y_β^i точек B^i. Каждая из этих матриц имеет ранг 3. В самом деле, пусть какой-нибудь определитель третьего порядка равен нулю, например,

$$\begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда система уравнений

$$\begin{gathered} \alpha x_1^1 + \beta x_2^1 + \gamma x_3^1 = 0, \\ \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 = 0, \\ \alpha x_1^3 + \beta x_2^3 + \gamma x_3^3 = 0, \end{gathered}$$

относительно α, β, γ имеет ненулевое решение α_0, β_0, γ_0. А это значит, что на прямой $\alpha_0 x_1 + \beta_0 x_2 + \gamma_0 x_3 = 0$ лежат точки A^1, A^2, A^3. И мы пришли к противоречию.

Так как ранг матрицы X равен трем, то четвертую ее строку можно получить из первых трех, умножая их на соответствующие числа λ_1, λ_2, λ_3 и складывая. Не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Действительно, для этого достаточно координаты точки A^1 умножить на λ_1, точки A^2 = на λ_2 и точки A^3 — на λ_3.

Точно так же можно считать, что четвертая строка матрицы Y получается простым сложением первых трех.

Постараемся теперь подобрать так коэффициенты формул (*), чтобы преобразование, ими задаваемое, переводило три точки A^1, A^2, A^3 в три точки B^1, B^2, B^3. Это нетрудно сделать. Подставим координаты этих точек в формулы (*). Тогда получим систему девяти уравнений с неизвестными a_{ij}. Эта система разбивается на три независимые системы

$$\begin{gathered} y_i^1 = a_{i1} x_1^1 + a_{i2} x_2^1 + a_{i3} x_3^1, \\ y_i^2 = a_{i1} x_1^2 + a_{i2} x_2^2 + a_{i3} x_3^2, \\ y_i^3 = a_{i1} x_1^3 + a_{i2} x_2^3 + a_{i3} x_3^3, \end{gathered}$$

соответствующие $i = 1, 2, 3$. Каждая из таких систем, очевидно, разрешима, так как имеет отличный от нуля определитель.

Покажем теперь, что определитель Δ полученного преобразования отличен от нуля. Действительно, легко видеть

$$\begin{vmatrix} y_1^1 & y_2^1 & y_3^1 \\ y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 \\ y_1^3 & y_2^3 & y_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{vmatrix}.$$

И так как определитель, составленный из y_i^i отличен от нуля (точки B^1, B^2, B^3 не лежат на одной прямой), то определитель Δ построенного проективного преобразования отличен от нуля.

Построенное проективное преобразование переводит также точку A_4 в B_4. В самом деле, если подставить в какую-нибудь из формул (*) координаты точек A^1, A^2, A^3 и B^1, B^2, B^3 и сложить полученные равенства почленно, то согласно указанной выше нормировке координат получим результат подстановки точек A^4 и B^4 в те же формулы.

Теорема 64. *Проективными преобразованиями* (*) *исчерпываются все проективные преобразования плоскости.*

Доказательство. Пусть S — какое-нибудь проективное преобразование. Возьмем какие-нибудь четыре точки A^1, A^2, A^3, A^4, по три не лежащие на одной прямой. Преобразование S переводит их в точки B^1, B^2, B^3, B^4, также по три не лежащие на одной прямой. Пусть S' — проективное преобразование (*), переводящее точки B^i в A^i. Тогда преобразование $H = S'S$, которое, очевидно, тоже будет проективным, оставляет точки A^1, A^2, A^3, A^4 неподвижными. Мы утверждаем, что преобразование H оставляет все точки неподвижными.

Для доказательства этого утверждения нам понадобятся несколько вспомогательных фактов. Во-первых, *проективное преобразование переводит гармонические пары точек в гармонические пары.* Это вытекает непосредственно из определения гармонических пар с помощью четырехвершинника и свойства проективного преобразования переводить прямые в прямые.

Пусть на плоскости введена какая-нибудь система проективных координат x_i. Возьмем на прямой $x_1 = 0$

четыре точки C^i $(0,\ \lambda_i,\ \mu_i)$ и составим так называемое ангармоническое отношение

$$(C^1C^2C^3C^4) = \frac{\begin{vmatrix}\lambda_1 & \mu_1\\ \lambda_3 & \mu_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_1 & \mu_1\\ \lambda_4 & \mu_4\end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix}\lambda_2 & \mu_2\\ \lambda_3 & \mu_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_2 & \mu_2\\ \lambda_4 & \mu_4\end{vmatrix}}.$$

Легко проверить, что $(C^1\ C^2\ C^3\ C^4)$ не зависит от нормировки координат.

Утверждаем, что *точки* C^1, C^2, C^3, C^4 *образуют гармоническую группу, т. е. пара* $C^1\ C^2$ *гармонически разделяет пару* $C^3\ C^4$ *тогда и только тогда, когда* $(C^1\ C^2\ C^3\ C^4) = -1$.

Прежде чем доказывать это утверждение, сделаем два замечания. Пусть на прямой $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ имеем три различные точки $P'(x_i')$, $P''(x_i'')$ и $P'''(x_i''')$. *Тогда координаты* P''' *можно выразить через координаты* P' *и* P'' *в форме* $x_i''' = \xi x_i' + \eta x_i''$. Это следует из того, что любое решение (x_i) уравнения $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ линейно выражается через два независимых. В нашем случае это (x_i') и (x_i''). Выражение координат P''' через координаты P' и P'' мы будем обозначать символически

$$P''' = \xi P' + \eta P''.$$

Заметим еще, что координаты P' и P'' можно нормировать так, что ξ и η будут равны единице. Для этого надо координаты P' умножить на ξ, а координаты P'' умножить на η.

Пусть точки P', P'' и P''' не лежат на одной прямой. *Тогда не существует чисел* ξ, η, ζ, *из коих хотя бы одно было отлично от нуля и выполнялось равенство*

$$\xi P' + \eta P'' + \zeta P''' = 0.$$

В самом деле, это равенство представляет собой систему трех равенств

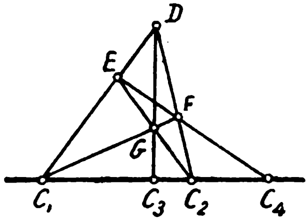
$$\begin{aligned}
\xi x_1' + \eta x_1'' + \zeta x_1''' &= 0,\\
\xi x_2' + \eta x_2'' + \zeta x_2''' &= 0,\\
\xi x_3' + \eta x_3'' + \zeta x_3''' &= 0.
\end{aligned}$$

Рассматривая их как систему уравнений относительно ξ, η, ζ видим, что она не имеет других решений, кроме

$\xi=\eta=\zeta=0$, так как ее определитель, составленный из x_i^k, не равен нулю (точки P', P'', P''' не лежат на одной прямой).

Теперь мы докажем, что для гармонической четверки точек $C_i(C_1C_2C_3C_4)=-1$. Обратимся к чертежу 55. При соответствующей нормировке координат точек будем иметь

$$E=C_1+D,\ C_4=C_1+C_2.$$



Черт, 55.

Далее, F лежит на EC_4 и C_2D. Отсюда $F=\xi'E+\eta'C_4=\xi''D+$ $+\eta''C_2$, т. е. $\xi'(C_1+D)+\eta'(C_1+$ $+C_2)=\xi''D+\eta''C_2$. Следовательно, $\xi'=-\eta'$, $\xi'=\xi''$, $\eta'=\eta''$. И можно считать, что $F=D-C_2$. Пользуясь далее тем, что G лежит на EC_2 и FC_1, аналогично находим $G=D+C_1-C_2$. Используя, наконец, то, что G лежит на C_1C_2 и DG, получим $C_3=C_1-C_2$.

Итак, координаты C_3 и C_4 выражаются через координаты C_1 и C_2 по формулам $\lambda_3=\lambda_1-\lambda_2$, $\mu_3=\mu_1-\mu_2$, $\lambda_4=\lambda_1+\lambda_2$, $\mu_4=\mu_1+\mu_2$. Подставляя эти значения λ и μ в формулу для ангармонического отношения, легко обнаруживаем, что $(C_1C_2C_3C_4)=-1$.

То, что только для гармонической четверки $(C_1C_2C_3C_4)=-1$, следует из того, что при данных C_1, C_2, C_3 условие $(C_1C_2C_3C_4)=-1$, определяет положение точки C_4 однозначно, так как однозначно определяется λ_4/μ_4.

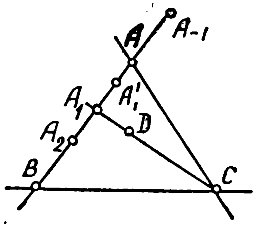
Выясним, когда для двух заданных пар точек A, B и C, D существует пара P, Q, гармонически разделяющая A, B и C, D. Построим систему проективных координат, в которой точки A, B, C, D лежат на оси $x_2=0$ и имеют координаты $(0,0,1)$, $(1,0,1)$, $(1,0,0)$, $(\xi,0,1)$. Очевидно, такая система координат строится без труда. Пусть точки P и Q имеют координаты $(\xi_1,0,1)$ и $(\xi_2,0,1)$. Имеем

$$\frac{\begin{vmatrix}0&1\\ \xi_1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0&1\\ \xi_2&1\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix}1&1\\ \xi_1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1\\ \xi_2&1\end{vmatrix}}=-1,\qquad \frac{\begin{vmatrix}1&0\\ \xi_1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&0\\ \xi_2&1\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix}\xi&1\\ \xi_1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\xi&1\\ \xi_2&1\end{vmatrix}}=-1.$$

Отсюда после несложных выкладок получается система уравнений для ξ_1 и ξ_2 такого вида:

$$\xi_1 + \xi_2 = 2\xi, \quad \xi_1\xi_2 = \xi.$$

Таким образом, ξ_1 и ξ_2 — корни квадратного уравнения $z^2 - 2\xi z + \xi = 0$, и, следовательно, решение будет вещественным, если $\xi^2 - \xi > 0$, т. е. при $\xi < 0$ и $\xi > 1$, а мнимым при $0 < \xi < 1$. Геометрически это значит, что *пара PQ, гармонически разделяющая A, B и C, D, существует, если пары A, B и C, D не разделяются, и такой пары P, Q не существует, если пары A, B и C, D разделяются.*



Черт. 56.

Отсюда следует важный вывод: *разделение пар инвариантно относительно проективных преобразований.*

Теперь мы можем легко закончить прерванное доказательство теоремы. Итак, проективное преобразование $H = S'S$ оставляет неподвижными точки A, B, C, D. Утверждается, что оно является тождественным. Обратимся к черт. 56. Так как прямые AB и CD остаются неподвижными, то их пересечение A_1 тоже неподвижно. Построим точку A_2 так, чтобы A, A_2 гармонически разделяла A_1, B. Очевидно, она остается неподвижной. Затем строим подобным образом точки A_3, A_4,... Все они являются неподвижными. Точки A_i можно строить и в другом направлении. Именно, строим точку A_{-1} так, чтобы A_{-1}, A_1 гармонически разделяла A, B. Затем строим A_{-2} и т. д.

Дальше мы строим для каждой пары точек A_iA_{i-1} точку A_i' так, чтобы A_i', B гармонически разделяла A_i, A_{i-1}. Все эти точки также будут неподвижными. Затем можно было бы построить неподвижные точки A_i'' и т. д.

Введем на афинной плоскости с бесконечно удаленной прямой BC декартовы координаты, приняв прямые AC и AB за оси координат и точку D за единичную точку (точку с координатами 1,1).

Простым подсчетом с помощью ангармонического отношения можно убедиться, что построенные нами точки A_n имеют координаты x, равные 1, 2, 3,...,— 1, —2... Точки A_n' имеют координаты $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, ... $-\frac{1}{2}$,

$-1\frac{1}{2}, \ldots$ Одним словом, продолжая достаточно далеко построение точек A_n^k, мы получим все точки с координатами вида $x = \pm\frac{m}{2^n}$.

Возьмем теперь произвольную точку $P(x, 0)$ на прямой AB. Если $x = \frac{m}{2^n}$, то она неподвижна. Пусть ни при каких целых m и n $x \neq \frac{m}{2^n}$. Очевидно, при любом n найдется такое m, что $(m-1)/2^n < x < m/2^n$. Обозначим A' и A'' точки с координатами x: $(m-1)/2^n$ и $m/2^n$. Они неподвижны. Пара A, P их разделяет, следовательно, пара A, HP тоже разделяет A', A''. Отсюда следует, что координата $\bar{x}$ точки HP удовлетворяет неравенствам $(m-1)/2^n < \bar{x} < m/2^n$. А так как n можно брать сколь угодно большим, то $\bar{x} = x$ и, следовательно, $HP = P$.

Итак, все точки прямой AB неподвижны. Аналогично устанавливаем, что все точки прямой BC неподвижны. Пусть теперь Q — любая точка плоскости. Проведем через нее две прямые, не проходящие через A. Пересекая прямые AB и AC, они неподвижны, ибо содержат по две неподвижные точки. Отсюда следует, что точка Q неподвижна. Итак, $S'S$ является тождественным. А так как преобразование S' имеет обратное, которое будет тоже иметь вид (*), то и преобразование $S = S'^{-1}$ имеет вид (*).

Теорема доказана.

§ 9. Другие предложения проективной геометрии

Пусть на проективной плоскости введены две системы проективных координат S и S'. Установим связь между координатами x_i и x_i' точек в этих системах координат.

Поставим в соответствие каждой точке A с координатами x_i в системе S точку A' с координатами x_i' тоже в системе S. Это отображение является проективным. Действительно, пусть g — прямая и $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ — ее уравнение. Так как x_i' — координаты точки A в системе S', то x'_i удовлетворяют уравнению прямой в системе S' $a'_1 x'_1 + a'_2 x'_2 + a'_3 x'_3 = 0$. Таким образом, указанное отображение переводит прямые в прямые. Кроме того, оно, очевидно, одно-однозначно. Отсюда по теореме 64 мы заключаем, что *координаты точки в различных системах проективных координат связаны линейными формулами*

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (*)$$

В пространстве имеют место аналогичные формулы.

Ангармоническим отношением четырех точек $C^i(x^i_k)$ называется число, которое с помощью проективных координат этих точек вычисляется по формуле

$$(C^1C^2C^3C^4) = \frac{\begin{vmatrix} x^1_i\, x^1_j \\ x^3_i x^3_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^1_i x^1_j \\ x^4_i\, x^4_j \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x^2_i\, x^2_j \\ x^3_i x^3_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2_i\, x^2_j \\ x^4_i x^4_j \end{vmatrix}} . \quad (i \neq j).$$

Для того чтобы это определение было корректным, надо, чтобы эта формула давала один и тот же результат при любых i, j и, кроме того, чтобы этот результат не зависел от выбора системы координат. Данное определение обладает этими свойствами.

Действительно, введем специальную систему координат так, чтобы точки $C^{i'}$ имели координаты соответственно $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(\xi, 1, 0)$. В таких координатах $(C^1C^2C^3C^4) = \frac{1}{\xi}$. С помощью формул (*) находим координаты точек C^i в любой другой системе координат (a_{12}, a_{22}, a_{32}), (a_{11}, a_{21}, a_{31}), $(a_{11} + a_{12}, a_{21} + a_{22}, a_{31} + a_{32})$, $(\xi a_{11} + a_{12}, \xi a_{21} + a_{22}, \xi a_{31} + a_{32})$. Простой подсчет показывает, что и в этих координатах $(C^1C^2C^3C^4) = \frac{1}{\xi}$. Таким образом, *ангармоническое отношение не зависит ни от системы координат, ни от выбора номеров координат, с помощью которых оно вычисляется.*

Так как проективное преобразование задается теми же формулами, что и преобразование координат, то отсюда следует, что *ангармоническое отношение точек не изменяется при проективном преобразовании.*

Ангармоническое отношение четырех прямых пучка определяется как ангармоническое отношение четырех точек пересечения этих прямых с какой-нибудь прямой c, не проходящей через центр пучка. *Это определение не зависит от прямой c.*

Действительно, пусть мы имеем две секущие прямые c и $\bar{c}$. Введем проективные координаты, приняв за оси координат две прямые пучка (оси x_1 и x_2) и прямую c. Пусть $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0$ — уравнение прямой $\bar{c}$ в этих координатах.

Рассмотрим проективное преобразование: $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2$, $x_3' = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$. Оно переводит прямые пучка в себя, а прямую $\bar{c}$ в c. Отсюда следует, что точки пересечения прямых c и $\bar{c}$ с прямыми пучка переводятся друг в друга проективным преобразованием и, следовательно, ангармонические отношения соответствующих четверок равны. Утверждение доказано.

Очевидно, *ангармоническое отношение четырех прямых пучка не изменяется при проективном преобразовании.*

Ангармоническое отношение четырех плоскостей в пучке определяется через ангармоническое отношение четырех точек пересечения этих плоскостей с прямой, не пересекающей ось пучка. Это определение также не зависит от выбора секущей прямой.

Кривой второго порядка на проективной плоскости называется фигура, все точки которой удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{33}x_3^2 = 0. \qquad (**)$$

Очевидно, это определение инвариантно относительно выбора системы проективных координат.

Из теоремы о приведении квадратичной формы линейным преобразованием переменных к каноническому виду следует существование такой системы проективных координат, в которой уравнение кривой второго порядка имеет вид

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 = 0,$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$ или 0.

Кривая второго порядка называется *невырожденной*, если все $\varepsilon_i \neq 0$. Если при этом все ε_i одного знака, то кривая называется мнимой, ибо не существует точек, координаты которых удовлетворяли бы уравнению кривой. Если среди ε_i есть равные нулю, то кривая называется *вырожденной*. Вырождение происходит в пару прямых или одну прямую, в которую пара прямых сливается. Если при вырождении два коэффициента ε_i отличны от нуля и одного знака, то говорят о вырождении в пару *мнимых прямых*.

Наши дальнейшие выводы, строго говоря, относятся к вещественным кривым. Перенесение их на мнимые кривые требует специального обоснования.

В связи с кривыми второго порядка в проективной геометрии вводится важное понятие *поляры точки* относительно кривой. Из аналитической геометрии читателю известно, что поляра точки A относительно кривой второго порядка (**) определяется, как геометрическое место точек B, гармонически разделяющих вместе с A пару точек пересечения прямой AB с данной кривой. Известно также, что поляра точки $A(x_i')$ задается уравнением

$$a_{11} x_1' x_1 + a_{12}(x_1' x_2 + x_2' x_1) + \ldots + a_{33} x_3' x_3 = 0.$$

Это определение не вполне корректно, так как прямая AB может не пересекать кривую (в вещественных точках). В связи с этим мы поляру определим формально, как прямую, задаваемую указанным уравнением. При этом, конечно, мы должны показать инвариантность принятого определения относительно преобразования координат. Но это, очевидно, не составляет труда.

Поляра обладает замечательными свойствами, известными также из аналитической геометрии. Именно, *если точка A движется по прямой b, то ее поляра проходит всегда через одну и ту же точку B, полярой которой служит прямая b. Полярное соответствие точек и пря-*

мых инвариантно относительно проективных преобразований плоскости.

В проективном пространстве вводится понятие поверхности второго порядка подобно тому, как понятие кривой на плоскости. Вводится полярное соответствие точек и плоскостей. Все это мы считаем известным из аналитической геометрии.

Теперь мы остановимся на одном из основных фактов проективной геометрии — *принципе двойственности.*

Если мы в плоских аксиомах связи выражение «точка лежит на прямой» заменим выражением «точка инцидентна» прямой, а выражение «прямая проходит через точку» — выражением «прямая инцидентна» точке, то при замене в каждой аксиоме слова «точка» словом «прямая» и слова «прямая» словом «точка» мы получим утверждения, которые имеют место в силу соответствующих аксиом.

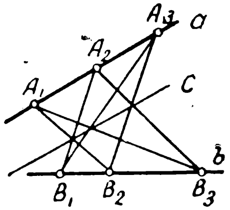
Действительно, в новой редакции первая аксиома гласит. Для двух точек A и B существует прямая, им инцидентная. Соответствующее утверждение: для двух прямых существует инцидентная с ними точка. Это следует из аксиомы I_9.

Аксиома I_2: для двух различных точек A и B существует не более одной прямой, с ними инцидентной. Соответствующее утверждение: для двух различных прямых a и b существует не более одной инцидентной с ними точки. Это следует из аксиомы I_2.

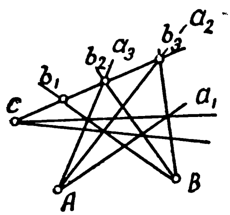
Аксиома I_3: для данной прямой существуют три точки, с ней инцидентные. Существуют три точки, не инцидентные с одной прямой. Соответствующее утверждение: для данной точки A существуют три прямые, с ней инцидентные, существуют три прямые, не инцидентные с одной точкой. Действительно, в силу аксиом I_3 существуют две точки B и C, не лежащие на одной прямой с A. На прямой BC есть три точки по той же аксиоме. Прямые, о которых идет речь, соединяют эти три точки с A. Второе утверждение также следует из аксиомы I_3. Действительно, соединим попарно тремя прямыми три точки, не лежащие на одной прямой. Они не проходят через одну точку.

Наконец, утверждение, соответствующее предложению Дезарга, которое надо присоединить к плоской системе аксиом двойственно само себе.

Определим следование троек прямых пучка через следование точек пересечения прямых пучка с какой-нибудь прямой, не проходящей через центр пучка. Это определение не зависит от выбора секущей прямой по аксиоме II_5. Определив таким образом следование прямых в пучке, мы видим, что для прямых в пучке выполняются все аксиомы порядка. Отсюда получается следующая теорема, именуемая принципом двойственности на плоскости.



Черт. 57.



Черт. 58.

Если верно некоторое утверждение A для точек и прямых, выраженное в терминах инцидентности и порядка, то верно также утверждение A', в котором слово «точка» заменено словом «прямая», а слово «прямая» — словом «точка».

Пример. Пусть точки A_1, A_2, A_3 инцидентны прямой a B_1, B_2, B_3 — точки, инцидентные прямой b, C_{ij} $(i \neq j)$ — точки, инцидентные прямым A_iB_j и A_jB_i. Тогда точки C_{ij} инцидентны одной прямой c (черт. 57). Это теорема Паппа.

Двойственное утверждение. Пусть прямые a_1, a_2, a_3 инцидентны точке A, b_1, b_2, b_3 — прямые, инцидентные точке B, c_{ij} $(i \neq j)$ — прямые, инцидентные точкам a_ib_j и a_jb_i ... Тогда прямые c_{ij} инцидентны одной точке (черт. 58).

В проективном пространстве также имеет место принцип двойственности. Им утверждается, что из справедливости всякого утверждения A для точек прямых и плоскостей следует утверждение A', в котором слово «точка» заменено словом «плоскость», а слово «плоскость» — словом «точка».

Двойственность в проективной геометрии естественно имеет и аналитическое выражение, которое мы сейчас проиллюстрируем.

Будем называть коэффициенты уравнения прямой *тангенциальными координатами* прямой. Очевидно, они определены лишь с точностью до произвольного отличного от нуля множителя, как и координаты точки.

Уравнение

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

при фиксированных u_1, u_2, u_3, как известно, является уравнением прямой (с координатами u_1, u_2, u_3), а при фиксированных x_1, x_2, x_3 оно есть уравнение пучка прямых (с центром (x_1, x_2, x_3)).

Как известно, каковы бы ни были две точки на прямой (y_i) и (z_i), координаты любой точки прямой можно представить в виде $x_i = \lambda y_i + \mu z_i$. Точно так же, каковы бы ни были две прямые пучка (v_i) и (ω_i), координаты любой прямой пучка представляются в виде $u_i = \lambda v_i + \mu\omega_i$.

Наконец, можно показать, что ангармоническое отношение четырех прямых пучка определяется по той же формуле, только координаты точек заменяются координатами прямых.

В пространстве аналогично вводятся тангенциальные координаты плоскостей и устанавливаются аналогичные факты.

Кривой второго класса называется фигура, составленная из всех прямых, координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$b_{11}u_1^2 + 2b_{12}u_1u_2 + \ldots + b_{33}u_3^2 = 0.$$

Из аналитической геометрии известно, что *кривая второго класса образована либо касательными кривой второго порядка, либо она состоит из двух пучков прямых, может быть совпадающих.*

§ 10. Различные геометрии в проективной схеме

Ф. Клейн в работе, известной под названием «О так называемой неэвклидовой геометрии», установил замечательную связь между эвклидовой геометрией, геометрией Лобачевского и геометрией Римана в узком смысле. Сейчас мы рассмотрим эту связь.

В главе IV была подробно рассмотрена реализация геометрии Лобачевского в круге $x^2 + y^2 < 1$ на эвклидовой плоскости. Очевидно, эту реализацию можно считать выполненной на проективной плоскости в области, ограниченной кривой второго порядка $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0$.

Спрашивается, нельзя ли подобную реализацию на проективной плоскости получить для эвклидовой геометрии?

Легко видеть, что такую реализацию указать нетрудно. И рассматриваемая нами в гл. II декартова реализация является таковой. Действительно, назовем точками эвклидовой плоскости точки проективной плоскости, у которых $x_3 \neq 0$, а движениями — проективные преобразования вида

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\vartheta - \varepsilon x_2 \sin\vartheta + a_1 x_3, \\ x_2' &= x_1 \sin\vartheta + \varepsilon x_2 \cos\vartheta + a_2 x_3, \\ x_3' &= x_3. \end{aligned} \tag{*}$$

Если прямую $x_3 = 0$ назвать бесконечно удаленной и перейти к декартовым координатам, то эти преобразования будут иметь вид

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\vartheta - \varepsilon y \sin\vartheta + a_1, \\ y' &= x \sin\theta + \varepsilon y \cos\vartheta + a_2. \end{aligned}$$

В точности такими формулами были определены движения в декартовой реализации эвклидовой геометрии.

Проективные преобразования (*) можно характеризовать и геометрическим способом. Они сохраняют вырожденную кривую второго класса $u_1^2 + u_2^2 = 0$. В самом деле, эта кривая состоит из двух пучков прямых $u_1 + iu_2 = 0$, $u_1 - iu_2 = 0$ с центрами в точках $(1, i, 0)$, $(1, -i, 0)$.

Легко видеть, что преобразование (*) либо оставляет эти точки неподвижными ($\varepsilon = 1$), либо переставляет их ($\varepsilon = -1$) и поэтому сохраняет кривую второго класса $u_1^2 + u_2^2 = 0$. Следует, однако, заметить, что проективные преобразования, определяемые указанным геометрическим свойством, включают не только преобразования (*). Они имеют более общую форму

$$\begin{aligned} x_1' &= \rho(x_1 \cos\vartheta - \varepsilon x_2 \sin\vartheta) + a_1 x_3, \\ x_2' &= \rho(x_1 \sin\vartheta + \varepsilon x_2 \cos\vartheta) + a_2 x_3, \\ x_3' &= x_3 \end{aligned}$$

и содержат не только движения, но и преобразования подобия.

Система аксиом геометрии Римана в узком смысле состоит из аксиом связи, аксиом порядка и аксиомы непрерывности проективной геометрии и аксиом конгруентности эвклидовой геометрии.

Эта система аксиом допускает реализацию, подобную рассмотренным. Именно, все аксиомы на плоскости будут выполняться, если под точкой мы будем понимать точку проективной плоскости, под прямой — проективную прямую, отношение принадлежности и порядка будем употреблять в смысле проективной геометрии и, наконец, под движениями будем понимать такие проективные преобразования, которые сохраняют мнимую невырожденную кривую второго порядка $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$.

Аналогичная реализация имеет место для пространственной системы аксиом.

Кривые второго класса $u_1^2 + u_2^2 \pm u_3^2 = 0$ образованы касательными кривых второго порядка $x_1^2 + x_2^2 \pm x_3^2 = 0$. Поэтому всякое проективное преобразование, сохраняющее кривую второго порядка $x_1^2 + x_2^2 \pm x_3^2 = 0$, сохраняет также кривую второго класса $u_1^2 + u_2^2 \pm u_3^2 = 0$. Отсюда следует, что проективные преобразования, сохраняющие кривую второго класса $u_1^2 + u_2^2 + \varepsilon u_3^2 = 0$, будут соответствовать движениям в геометрии Римана, если $\varepsilon = +1$, движениям в геометрии Лобачевского, если $\varepsilon = -1$ и, наконец, эвклидовым движениям и преобразованиям подобия, если $\varepsilon = 0$.

Кривая второго порядка или второго класса, инвариантная относительно проективных преобразований, соответствующих той или иной геометрии, называется *абсолютом*.

При рассмотрении интерпретации Клейна геометрии Лобачевского было отмечено, что расстояние между двумя точками A и B плоскости Лобачевского в этой интерпретации равно логарифму ангармонического отношения четырех точек — двух данных и двух точек пересечения прямой AB с абсолютом. Аналогичный результат имеет место и в геометрии Римана. И во всех трех геометриях угол между прямыми a и b измеряется логарифмом ангармонического отношения четырех прямых, из коих две — a и b, а две другие принадлежат пучку ab и абсолюту, как кривой второго класса.

Система аксиом *афинной геометрии* состоит из всех аксиом эвклидовой геометрии, кроме аксиом конгруентности. Система аксиом афинной геометрии на плоскости включает еще аксиому Дезарга в соответствующей формулировке, учитывающей возможность параллельных прямых.

Легко указать реализацию системы аксиом афинной геометрии. Для этого надо просто взять декартову реализацию эвклидовой геометрии, не вводя движения. Отсюда следует, что ее можно интерпретировать на проективной плоскости, из которой удалена одна прямая (обычно ее называют бесконечно удаленной).

Введение декартовых координат на афинной плоскости (§ 6) позволяет без особого труда заключить о полноте системы аксиом афинной геометрии на плоскости подобно тому, как это мы делали в случае других геометрий.

На первый взгляд может показаться странным, что система аксиом афинной геометрии полна. Ведь она является только частью системы аксиом эвклидовой геометрии. Но в этом нет ничего удивительного, так как аксиомы движения, которыми отличаются эти системы, предполагают новое отношение — «движение».

В афинной геометрии вводится важное понятие *афинного преобразования*. Это преобразование в случае плоскости переводит прямые в прямые. Доказывается, что всякое афинное преобразование в декартовых координатах задается формулами

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2, \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Таким образом, в указанной проективной интерпретации оно задается формулами

$$\begin{aligned} x_1' &= a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3, \\ x_2' &= a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3, \\ x_3' &= x_3 \end{aligned}$$

и состоит из тех проективных преобразований, которые сохраняют как целое бесконечно удаленную прямую $x_3 = 0$.

Общим для всех рассмотренных нами геометрий является то, что в каждой из них есть группа преобразований, переводящая точки в точки, прямые — в прямые и сохраняющая отношения принадлежности и порядка. Это — движения в случае эвклидовой геометрии, геометрии Лобачевского и геометрии Римана, афинные преобразования в афинной геометрии и проективные преобразования в проективной геометрии.

Пусть мы имеем две фигуры F и F' в какой-нибудь из указанных геометрий, переводимые друг в друга соответствующим преобразованием. Очевидно, мы не можем усмотреть никакой разницы между этими фигурами, так как соответствующие элементы их — точки и прямые находятся в одинаковых отношениях принадлежности и порядка. Отсюда следует, что объектом изучения в той или иной геометрии являются свойства фигур, инвариантные относительно преобразований соответствующей группы.

Естественно, возникает вопрос, каковы те простейшие фигуры, составленные из точек и прямых, устроенные одинаково в отношении принадлежности и порядка элементов в них, которые не эквивалентны относительно преобразований данной геометрии. Рассмотрим примеры.

Начнем с проективной геометрии. Легко видеть, что любые две точки можно перевести проективным преобразованием в любые две другие. Любые три точки, лежащие на одной прямой, можно перевести в любые три точки, лежащие на прямой. И только четыре точки прямой далеко не всегда можно перевести в четыре другие точки, так как ангармоническое отношение этих четверок должно быть одинаковым. Таким образом, простейшей нетривиальной фигурой, все точки которой лежат на прямой, в проективной геометрии представляет собой четверка точек.

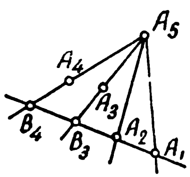
Надо сказать, что ангармоническое отношение этой четверки ее полностью уже характеризует. В проективной геометрии ангармоническое отношение является простейшим и притом основным числовым инвариантом. Можно показать, что любой числовой инвариант фигуры относительно проективных преобразований может быть выражен через ангармонические отношения ее точек или точек фигуры, однозначно строящейся с помощью данной.

Пример. Фигуру, составленную из пяти точек A_i общего расположения (черт. 59), можно характеризовать ангармоническим отношением четырех точек A_1, A_2, B_3, B_4.

В случае афинной геометрии простейшая фигура на прямой состоит из трех точек. Ее числовой инвариант — простое отношение Δ трех точек. В декартовых координатах x, y оно определяется по одной из формул

$$\Delta = \frac{y_1 - y_2}{y_2 - y_3} \quad \text{или} \quad \Delta = \frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3}$$

и представляет собой ангармоническое отношение четырех точек — трех данных и бесконечно удаленной. Так как при афинном преобразовании бесконечно удаленная точка на прямой (проективной) остается неподвижной, то ясно, что это ангармоническое отношение является инвариантом. То, что фигура из двух точек не имеет инварианта, ясно, так как любые две точки афинным преобразованием переводятся в любые две другие.



Черт. 59.

Всякий инвариант фигуры относительно афинных преобразований может быть выражен через простые отношения.

В эвклидовой геометрии, геометрии Лобачевского и геометрии Римана простейшей фигурой, имеющей инвариант, является пара точек. Этот инвариант есть расстояние между точками. Все другие инварианты любой фигуры могут быть выражены через расстояния между точками.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Алексей Васильевич Погорелов

ЛЕКЦИИ ПО ОСНОВАНИЯМ ГЕОМЕТРИИ

Редактор *З. Г. Ковалева.*
Техредактор *П. П. Александрова.*
Корректор *Л. И. Качанова.*

Передано в набор 28/III 1963 г. Подписано к печати 9/IV 1964 г. БЦ 30155. Формат $84 \times 108^1/_{32}$. Объем: 2,18 бум. л., 4,37 физич. печ. л., 7,1. усл. печ. л., 6,6, уч.-изд. л. Зак. 3-145. Тираж 5000. Цена 30 коп.

Отпечатано с матриц Книжной фабрики им. Фрунзе Государственного комитета Совета Министров Украинской ССР по печати, Харьков, Донец-Захаржевская, 6/8, в харьковской Книжной типографии «Коммунист» Государственного комитета Совета Министров Украинской ССР по печати, Харьков, Пушкинская, 29. Зак. А-43.

Цена 30 коп.